Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

2. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: **Freitag**, **20.03.2009**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

4. Heisenbergbild

1+1+1=3 Punkte

Betrachte ein System, dessen Hamiltonoperator H nicht explizit von der Zeit abhängt.

a) A sei der Operator zu einer Observablen $\mathcal{A}$ des Systems im Schödingerbild und A_H der entsprechende Operator im Heisenbergbild. Zeige: Ist der Anfangzustand $|\psi(0)\rangle$ Eigenzustand von A, so ist $|\psi(t)\rangle$ Eigenvektor von $A_H(-t)$ zum selben Eigenwert.

b) Sei H nun der Hamiltonoperator für ein freies Teilchen ($V(x) = 0$) der Masse m in einer Dimension. Löse die kanonischen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $X_H(t)$ und $P_H(t)$ der Orts- bzw. Impulsvariablen im Heisenbergbild, d.h.

$$\frac{dX_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[X_H(t), H\right] \text{ und } \frac{dP_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[P_H(t), H\right].$$

c) Berechne für ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential $V(X) = \frac{m\omega^2 X^2}{2}$ dieselben Punkte wie in Aufgabenteil **b)**.

5. Zerfließen des Gauß'schen Wellepakets

3 Punkte

Für den Zeit-Entwicklungsoperator gibt es die Darstellung: $U(t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$. Für ein freies Teilchen ergibt sich:

$$U(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}$$

Betrachten Sie jetzt den Aufgangszustand:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$$

Berechne $\psi(x,t)$ mit Hilfe des vorgegeben Entwicklungsoperator $U(t)$:

Anleitung:

- Es ist ratsam, $\psi(x,0)$ nach Potenzen von $z \equiv x - \frac{ip_0\Delta^2}{\hbar}$ zu entwicklen .
- Beachten Sie die Entwicklung

$$(1+y)^{-n-\frac{1}{2}} = 1 - (n+\frac{1}{2})y + \frac{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}{2!}y^2 + \cdots$$

6. Relativistische Korrekturen in Störungstheorie^v *1+1=2 Punkte*

Ausgangspunkt ist der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R}.$$

Aufgrund der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4}$$

kommt zu H_0 ein Störterm H_1 hinzu.

a) Entwickle E bis zur zweiten Ordung in $\frac{P^2}{m^2c^2}$, und identifiziere H_1 mit dem Beitrag der Entwicklung proportional zu P^4. Danach schreibe H_1 als Funktion des Operators $1/R$ um [Hinweis: Benutze die explizite Definition von H_0 und H_1 als Funktion von P und $1/R$).

b) Berechne die Korrekturen für das Spektrum von H_0 in der ersten Ordnung in H_1 (Beachte dass das Integral $\langle n,l,m|\frac{1}{R}|n,l,m\rangle = \frac{Z}{an^2}$, und $< n,l,m|\frac{1}{R^2}|n,l,m >= \frac{2Z^2}{(2l+1)n^3a^2}$, wobei a der Bohr Radius, und $|n,m,l\rangle$ die Standardnotation für die Quantenzahlen des Wasserstoff ist). Warum ist die Störungtheorie mit den Zuständen $|n,m,l\rangle$ trozdem Entartung zulässig?

v = vorlesungsrelevant