Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

4. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: **Freitag**, **03.04.2009**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

9. "Anomaler" Zeeman Effekt^v *1+2=3 Punkte*

Der Hamiltonoperator eines Ein-Elektron-Atoms in einem konstanten Magnetfeld B, inklusive der Spin-Bahn Wechselwirkung ist der folgende:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R} + \xi(r)\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \frac{\mu_B}{\hbar}(\mathbf{L} + g_s\mathbf{S})\cdot\mathbf{B}$$

wobei μ_B das Bohrsche Magneton und $\xi(r) = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{Ze^2}{R^3}$ ist. Außerdem nehmen wir an, das der gyromagnetische Faktor des Elektronenspins $g_s = 2$ ist, und vernachlässigen die Effekte der Massenreduktion, die relativistischen Korrekturen der kinetischen Energie und den Darwin Term. Aus historischen Gründen ist der Fall eines schwachen magnetischen Felds als "anomaler" Zeeman Effekt bezeichnet (wobei "anomal" den Unterschied zu dem klassischen Zeeman Effekt, d.h. ohne Spin, deutlich machen soll).

a) Für den "anomalen" Zeeman Effekt, kann man den letzten Term des Hamilton-Operators H wie eine kleine Störung H_1 betrachten. Schreibe den Ausdruck für den Zeeman Effekt in der ersten Ordnung der Störungstheorie in der Eigenbasis des ungestörten Hamilton-Operators.

b) Mit der Hilfe der folgenden Clebsch-Gordan Koeffizienten

$$\begin{aligned} |j = l + \frac{1}{2}, m, l, s = \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l, l_z = m - \frac{1}{2}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l, m + \frac{1}{2}\rangle|\downarrow\rangle \\ |j = l - \frac{1}{2}, m, l, s = \frac{1}{2}\rangle &= -\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l, l_z = m - \frac{1}{2}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,|l, m + \frac{1}{2}\rangle|\downarrow\rangle, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir mit der Notation $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ die Spinzustände $|s = \frac{1}{2}, s_z = +\frac{1}{2}\rangle$ und $|s = \frac{1}{2}, s_z = -\frac{1}{2}\rangle$ bezeichnet haben, berechne den expliziten Wert der Energie Korrekturen des anolmales Zeeman Effekt als Funktion der Quantenzahlen der ungestörte Hamilton-Operator H.

v = vorlesungsrelevant

10. Zeitabh. Störung eines harmonischen Osczillators *2+1=3 Punkte*

Ein geladener linearer harmonischer Oszillator (Ladung q, Masse m und Kreisefrequenz ω) befinde sich zur Zeit $t_0 = -\infty$ in seinem Grundzustand.

a) Berechne in erster Ordung zeitabhängiger Störungtheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator zur Zeit $t = +\infty$ in seinem n-ten Energieeigenzustand anzutreffen, wenn er im Zeitintervall $(-\infty,\infty)$ der Wirkung des zeitabhängigen homogenen elektrischen Feldes

$$\mathcal{E}(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau} \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{\tau^2}}$$

mit A und τ reelen und positiven Konstanten ausgesetzt ist.

b) Unter welcher Voraussetzung bzgl. der Größe von A und τ ist die Beschränkung auf die erste Ordnug Störungstheorie möglich?

11. Richtungwechsel eines magnetischen Feldes in der "Sudden approximation" *2 Punkte*

Betrachte ein Spin $\frac{1}{2}$ System mit gyromagnetischem Faktor γ, worauf ein magnetisches Feld $\vec{B}$ wirkt.

Der Anfangszustand des Systems bei $t = 0$ sei in der s, s_z Basis gegeben als:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |s = \frac{1}{2}; s_z = +\frac{1}{2}\rangle$$

Nehme an, dass das magnetische Feld bis zu einem Zeitpunkt $t = a$ entlang der x-Richtung liegt. Dann wird plötzlich das Feld in die z-Richtung ausgerichtet. Schreibe den zeitabhängigen Hamilton-Operator des Systems und berechne dann in der "Sudden approximation" die Zeitentwicklung des Zustandes $\Psi(t)$ für alle Zeiten $t > 0$.