Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

5. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: **Freitag**, **24.04.2009**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

12. Zwei Definitionen für die Entropie^v *1 Punkte*

Die Entropie kann aus einer thermodynamischen Identität definiert werden, und zwar als

$$S(T) = -\frac{\partial F(T)}{\partial T},$$

wobei die Freie (Helmholtz) Energie als $F(T) = -k_B T\, lnZ(T)$ mit der Zustandsumme $Z(T) = Spur[e^{-\frac{H}{k_b T}}]$ definiert ist.
Eine zweite mögliche Definition der Entropie ist durch den statistichen Erwatungswert des Entropie-Operators $\hat{S}(T) = -k_B ln(\hat{\rho})$ gegeben, und zwar

$$S(T) = -k_B\, Spur[\rho\, ln(\rho)].$$

Beweise die Gleichheit der beiden Formeln für $\hat{\rho} = \frac{e^{-\frac{H}{k_B T}}}{Z}$.

13. Dichte-Operator für ein Spin $\frac{1}{2}$ System *2+1+2+2=7 Punkte*

Ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen durchquert einen Stern-Gerlach Apparart, welcher den Spin des Teilchens entlang der vom Einheitsvektor $\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ definierten Richtung misst (hier ist θ der Winkel zwichen $\hat{n}$ und der z-Achse und ϕ ist der Winkel zwischen der Projektion von $\hat{n}$ auf die xy Ebene und der x-Achse).

a) Beweise dass man den Dichte-Operator für den Spin $+\frac{\hbar}{2}$ (nach der Messung im Stern-Gerlach Apparat) definieren kann, als

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{1}} + \hat{n}\cdot\vec{\sigma}],$$

wobei $\hat{\mathbf{1}}$ der 2×2 Identität Operator, und $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ein Vektor mit den drei Pauli Matrizen σ_x,σ_y und σ_z ist. Hinweis: Ein beliebiger 2×2 Operator $\hat{A}$ kann immer in der Basis $\{\hat{\mathbf{1}}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ geschrieben werden als $\hat{A} = \vec{a}_0\hat{\mathbf{1}} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$, wobei $a_0 = \frac{1}{2}Spur[\hat{A}]$, $a_i = \frac{1}{2}Spur[\sigma_i\hat{A}]$ mit $i = x, y, z$.

b) Berechne die Werte der Spur des Quadrats des so definierten Dichte-Operators. Könnte man die Ergebnisse in diesem Fall auch ohne Rechung vorhersagen?

c) Betrachte nun ein Spin $\frac{1}{2}$ einer gemischten Gesamtheit von Spins, dessen Dichte-Operator man in der Basis $|s = \frac{1}{2}, s_z = \pm\frac{1}{2}\rangle = |\pm\rangle$ schreiben kann, z.B. als $\hat{\rho} = p|+\rangle\langle+| + (1-p)|-\rangle\langle-|$ mit $0 < p < 1$. Zeige, dass man den Dichte-Operator immer umschreiben kann, als

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{1}} + \vec{q} \cdot \vec{\sigma}],$$

wobei $0 < |\vec{q}|^2 < 1$ (Hinweis: Benutze die allgemeinen Eigenschaften des Dichte-Operators). Welche Ergebniss kann man jetzt für $Spur[\hat{\rho}^2]$ erwarten?

d) Betrachte schließlich den Spin eines Electrons, das sich in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_x\hat{x}$ befindet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gehört er einer gemischten Gesamtheit mit dem Dichte-Operator

$$\hat{\rho}(t = 0) = \frac{1}{4}|+\rangle\langle+| + \frac{3}{4}|-\rangle\langle-|$$

an. Berechne die Zeitentwicklung des Dichte-Operators und den Erwatungswert der $z-$ Komponente des Spins als Funktion der Zeit.

14. No-Cloning theorem *2 Punkte*

Inkompatible Observable wie z.B. die Spinkomponenten S_x und S_y sind nicht gleichzeitig meßbar, vielmehr verändert die Messung der einen Observablen das zu erwartende Ergebnis einer Messung der anderen. Gäbe es jedoch die Möglichkeit, den Spinzustand zu klonen, also vollständig identisch auf einen zweiten, gleichartigen Spin zu übertragen, so wäre das wichtige Prinzip inkompatibler Observablen ausgehebelt: Man bräuchte nur S_x am Orginal- und S_y am geklonten Zustand zu messen, um beide exakt zu bestimmen (wenn auch nicht am gleichen System). Es sollte deshalb ein formales Argument geben, welches das klonen verbietet.
Der Vorgang des Klonens besteht darin, einen unbekannten (normierten) Zustand $|\psi\rangle_1$ eines Spins 1 auf einen zweiten Spin 2 zu übertragen. Der zweite Spin muß gleichartig sein, z.B. beide Spin $\frac{1}{2}$, um überhaupt den identischen Zustand annehmen zu können. Ansonsten ist der Ausgangszustand $|\chi\rangle_2$ des zweiten Spins beliebig. Vor dem Klonen befindet sich das Gesamtsystem aus Spin 1 und Spin 2 in einem (beliebigen) Zustand $|\psi\rangle_1|\chi\rangle_2$. Fur den Klonvorgang können wir einen unitären Operator $\hat{U}$ ansetzen, der nicht von dem zu klonenden Zustand $|\psi\rangle$ abhängen sollte, da dieser unbekannt ist,

$$|\psi\rangle_1|\chi\rangle_2 \longrightarrow \hat{U}|\psi\rangle_1|\chi\rangle_2 = |\psi\rangle_1|\psi\rangle_2,$$

Somit muß $\hat{U}$ auch einen anderen Ausgangszustand $|\psi\rangle$ klonen,

$$|\phi\rangle_1|\chi\rangle_2 \longrightarrow \hat{U}|\phi\rangle_1|\chi\rangle_2 = |\phi\rangle_1|\phi\rangle_2.$$

Was besagt dies über die Möglichkeit des Klones?
Hinweis: Berechne das Skalarprodukt $\langle\psi|_1\langle\psi|_2|\phi\rangle_1|\phi\rangle_2$.

v = vorlesungrelevant