Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

7. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: **Freitag**, **29.05.2009**, zu Beginn der Übungstunde(Tutorium).
Beachte dass 22.05.09 Feirtag ist.

18. Kontinuierliche Transformationsgruppe^v *1+1=2 Punkte*

Der Effekt der Translation eines Vektors $\vec{a}$ auf den Zustand $\psi(\vec{r})$ ist definiert durch den Operator

$$T(\vec{a})\,\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}-\vec{a}).$$

a) Zeige, dass $T(\vec{a})$ explizit als Funktion des Impulsoperators $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ (deswegen *Generator der Translation*) geschrieben werden kann, als

$$T(a) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{a}}.$$

b) Zeige, dass der Operator T alle Eigenschaften einer Gruppe hat.

19. Kontinuitätgleichung *2+1+1=4 Punkte*

a) Sei $\phi(x)$ mit x=($\vec{r}$,t) eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung, d.h. $\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\phi(x) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x)$. Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung, d.h. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ erfüllt ist mit $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$, und $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right)$.

b) Ist die so definiert Wahrscheinlichkeitsdichte ρ positiv-definiert, wie im Fall der Schödinger Gleichung?

c) Sei der 4−er Spinor $\psi(x)$ eine Lösung der Dirac Gleichung, d.h. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = (c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2)\psi(x)$. Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist mit $\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x)$ und $\vec{j} = c\psi^\dagger(x)\vec{\alpha}\psi(x)$.

20. Diskrete Symmetriegruppen

1+1+1+1=4 Punkte

Der Effekt des so genannten Operators der Ladungskonjugation (oder $C-$Parität) auf einen Zustand und den Hamilton-Operator H ist der folgende

$$C\psi(\vec{r}) = \psi^*(\vec{r}), \;\; CHC^{-1} = H^*$$

a) Zeige, dass $[C, H] = 0$, wenn H ein nicht relativistcher Hamilton-Operator ohne elektromagnetisches Feld (d.h. $\varphi(x) = 0$, $\vec{A}(x) = 0$) ist.

b) Seien $\psi_n(\vec{r})$ die Eigenvektoren von H. Finde die gemeinsame Eigenbasis von C und H. Welches sind die möglichen Eigenwerte von C?

c) Bleiben die Ergebnisse der Punkten **a)** und **b)** gültig, wenn ein elektromagnetisches Feld angeschaltet wird?

d) Der Effekt des Paritäts-Operators P auf einen beliebigen Zustand $\psi(\vec{r})$ ist folgender

$$P\,\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}).$$

Sei $\{\psi_n(\vec{r})\}$ eine Eigenbasis von H mit $[P, H] = 0$. Finde die gemeinsame Eigenbasis von H und P. Welches sind die möglichen Eigenwerte von P?

v = vorlesungrelevant