IFP
TU Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

8. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: **Freitag**, **05.06.2009**, zu Beginn der Übungstunde(Tutorium).

21. Symmetrisierende/Antisymmetrisierende Projektoren^v

1+1=2 Punkte

Die symmetrisierenden und antisymmetrisierenden Operatoren für ein System N identischer Teilchen sind definiert als

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!} \sum_n \mathcal{P}_n, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{N!} \sum_n \epsilon_n \mathcal{P}_n,$$

wobei die Summe über alle möglichen Permutationen (definiert vom Pemutationsoperator $\mathcal{P}$) gemacht ist, und $\epsilon_n = \pm 1$ für gerade/ungerade Permutationen.

a) Zeige, dass diese Operatorer Projektoren sind, d.h., $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$, und $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

b) Zeige, dass die zwei Opertaoren "orthogonal" sind, d.h. $\mathcal{S}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{S} = 0$.

22. Zwei und drei identische Teilchen

2+2+1=5 Punkte

Sei h_0 der Hamilton-Operator eines Teilchens. Dieser Hamilton-Operator wirkt nur auf die Bahnvariabeln und hat drei äquidistante Eigenzustände (z.B., mit Eigenenergien $0, \hbar\omega_0$, und $2\hbar\omega_0$, mit $\omega_0 > 0$), die in Bahnraum nicht entartet sind.

a) Betrachte ein System mit zwei unabhängingen Elektronen, dessen Hamiloton-Operator

$$H = h_0(1) + h_0(2)$$

ist. Finde die Eigenbasis dieses Systems und berechne die korrespondierenden Entartungen. Wiederhole die gleiche Rechung für ein System mit zwei unabhängingen Bosonen mit Spin 0.

b) Wie werden sich die Ergebnisse ändern, wenn auch der folgenden Spin-Spin Wechselwirkungsbeitrag ($V = -J\vec{S}(1) \cdot \vec{S}(2)$) im Hamilton-Operator H berücksichtigt wird?

c) Betrachte nun das gleiche Problem wie in **a)**, aber für ein System von drei Bosonen mit spin 0.

23. Lösung der (freien) Dirac und Weyl Gleichung *2+1+1=4 Punkte*

a) Berechne die explizite Lösung der Dirac Gleichung für Impuls $\vec{p}$ und Energie E. (Hinweis: Versuche eine passende ebene Wellen Lösung zu finden. Den 4er-Spinor dieser Lösung kann man dann in zwei 2−Komponenten Spinoren ϕ und χ trennen.)

b) Betrachte nun den masselosen Fall $m = 0$ (Weyl Gleichung). Was ist der Unterschied zur allegemeinen Lösung von **a)**? Welche physikalischen Systeme realisieren den Fall der Weyl Gleichung?

c) Bilde den gemeinsamen Operator $\mathcal{CPT}$, wobei $\mathcal{C} = i\gamma^2 K$ (K ist die komplexe Konjugation), $\mathcal{P} = \gamma^0$ mit $\vec{r} \to -\vec{r}$, $\mathcal{T} = i\gamma^1\gamma^3 K$ mit $t \to -t$, und vereinfache das Ergebnis soweit wie möglich. Intepretiere das Ergebnis physikalisch.

v = vorlesungsrelevant