
10. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: Freitag, 26.06.2009, zu Beginn der Übungstunde(Tutorium). Bemerkung: Letzte Übungsblatt vor Klausur

27. Basiswechsel in zweiter Quantisierung^k

2+2+2=6 Punkte

- a) Seien a_α^\dagger und a_α die Erzeugungs/Vernichtungs-Operatoren in einer bestimmten ON-Basis $\{|\alpha\rangle\}$, so hat man in Besetzungszahldarstellung $a_\alpha^\dagger|0\rangle \equiv |\alpha\rangle$. Betrachte nun eine andere ON-Basis $\{|\beta\rangle\}$ und drücke die Erzeugung/Vernichtungs-Operatoren a_β^\dagger und a_β , die zu dieser neuen Basis gehören, durch a_α^\dagger bzw. a_α aus. Hinweis: Ausgangspunkt ist die Vollständigkeitsrelation, die man in Besetzungszahldarstellung schreiben kann.
- b) Beweise, ausgehend von den (Anti-)Vertauschungsrelationen für (Fermionen)Bosonen, dass die Erzeuger/Vernichter in der neuen ON-Basis $\{|\beta\rangle\}$ die gleichen (Anti-)Vertauschungsrelationen wie a_α^\dagger und a_α erfüllen.
- c) Betrachte nun den "Hubbard" Hamilton-Operator der Vorlesung, mit $U = 0$ (d.h., nur Hüpfprozessen zwischen nächsten Nachbar-Gitterplätzen) in einer Dimension. Berechne die Energiewerte mit Hilfe des folgenden Basiswechsels $a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N\ell}} \sum_{x_i} e^{-ikx_i} a_i$, wobei a_i^\dagger and a_i der Erzeugungs/Vernichtungs-Operatoren für ein Elektron auf dem Gitterplatz $x_i = i\ell$, mit $i = 1, \dots, N$ sind (ℓ ist die Gitterkonstante). Wie kann man das Ergebniss für 2 bzw. 3 Dimensionen erweitern?

28. Pfadintegral für ein freies Teilchen

2+3=5 Punkte

Betrachte die Bewegung eines freien Teilchens mit Masse m , dessen Position $x = 0$ bei $t = 0$, und $x = x_1$ bei $t = t_1$ ist. Die klassische Trajektorie des Teilchens ist deswegen $x(t) = \frac{x_1}{t_1} t$. Betrachte nun zusätzliche (Quanten)Pfade um die klassische Trajektorie in der Form $x_\epsilon(t) = \frac{x_1}{t_1} t^{1+\epsilon}$ ($\epsilon = 0$ entspricht dem klassischen Bewegungspfad).

- a) Finde den Ausdruck der (ϵ abhängigen) Wirkung S , die zu diesen Pfaden korrespondiert. Für Welchen Pfad ist die Wirkung minimal?
- b) Gebe eine Abschätzung wieviele (Quante)Pfade (d.h., welche ϵ) für ein klassisches Teilchen ($m = 1\text{g}$) beitragen, und ein quantenmechanisches Teilchen ($m = 10^{-27}\text{g}$). Hinweis: Betrachte die Entwicklung von $\phi = \frac{S}{\hbar}$ um das Minimum und schätze die möglichen Werte von ϵ in beiden Fälle ab.

$k = \text{klausurniveau}$