Ergebnisse Aufgabe 11

a)

$$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \, e^{i(kr' + \vec{k}\vec{r}')} \frac{V(r')}{r'} \right|$$

$$= \left| \frac{m}{ik\hbar^2} \int_0^\infty dr' \, V(r') \left(e^{2ikr'} - 1 \right) \right|$$

mit $V(r') = V_0 \, e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$

$$= \left| \frac{m V_0}{ik\hbar^2} \int_0^\infty dr \; e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \left(e^{2ikr} - 1 \right) \right|$$

Integrand ungerade!

$$= \underline{\underline{\left| \frac{m V_0 r_0 \sqrt{\pi}}{2ik\hbar^2} \left(-1 + e^{-k^2 r_0^2} \left(1 + i \, \mathrm{erfi}(k r_0) \right) \right) \right|}}$$

komplexe error-Funktion

b) $$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) = |f(\theta,\phi)|^2$$

mit erster Bornscher Näherung

$$f(\theta,\phi) = -4\pi^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle k' | V | k \rangle = - r_0^3 V_0 \sqrt{\pi} \frac{m}{\hbar^2} \, e^{-q^2 r_0^2 / 4}$$

wobei $q = |\vec{q}| = |\vec{k}' - \vec{k}|$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) \overset{1.B.N.}{\approx} \left(\frac{r_0^3 V_0 m}{2\hbar^2} \right)^2 \pi \cdot e^{-\frac{1}{2} q^2 r_0^2}}}$$

c) $$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\underline{\underline{\overset{1.B.N.}{\approx} \left(\frac{r_0^2 V_0 m \pi}{\hbar^2 k} \right)^2 \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2k^2 r_0^2} \right)}}$$

Die Diskrepanz zwischen dem opt. Theorem $\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \mathrm{Im}(f(0))$ und c) kommt durch die approximative Berechnung von f in 1. Born. Näherung.

Ergebnisse von Aufgabe 12

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + E\right)\psi(\vec{x}) = U(\vec{x})\,\psi(\vec{x})$$

mit $$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + E\right) G_0(E,\vec{R}) = \delta(\vec{R})$$

$$\overset{FT}{\Rightarrow} \quad \tilde{G}_0(E,\vec{k}) = \frac{1}{E - \frac{\hbar^2}{2m}k^2}$$

Zur Berechnung des Integrals für die FT zu $G_0(E,\vec{R})$ verschieben wir die Polstellen in die imaginäre Ebene und benutzen den Residuensatz.

$$G_0^{\pm}(E,\vec{R}) = \frac{m}{8\pi^2 i R \hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk' \left(\frac{1}{k \pm i\varepsilon - k'} - \frac{1}{k \pm i\varepsilon + k'}\right)\left(e^{ik'R} - e^{-ik'R}\right)$$

mit $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$

$$\underline{\underline{G_0^{\pm}(E,\vec{R}) = -\frac{m}{2\pi R\hbar^2}\, e^{\pm ikR}}}$$