Zusammenfassung der Ergebnisse des Beispiels 7
(mit Musterlösungen für 7f, 7g)

In Chiraler Darstellung:

7a) $\vec{\alpha}_{(ch)} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \emptyset \\ \emptyset & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$ d. h. $H_D^{(ch)} = \vec{\alpha}_{ch}\,\vec{p}$

7b) • $\psi_{1,ch} = e^{-iEt+ip_x x}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_x}{E_p+m} \\ -1 \\ \frac{p_x}{E+m} \end{pmatrix}$; $\psi_{2,ch} = e^{-iEt+ip_x}\begin{pmatrix} \frac{p_x}{E+m} \\ 1 \\ \frac{p_x}{E+m} \\ -1 \end{pmatrix}$ $E>0$

$\psi_{3,ch} = e^{-iEt+ip_x x}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_x}{E-m} \\ +1 \\ \frac{p_x}{E-m} \end{pmatrix}$; $\psi_{4,ch} = e^{-iEt+ip_x x}\begin{pmatrix} \frac{p_x}{E-m} \\ 1 \\ -\frac{p_x}{E-m} \\ +1 \end{pmatrix}$ $E<0$

• $p \gg m$ in Pauli-Dirac Darstellung

$\psi_1 = e^{-iEt+ipx}\begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \\ \emptyset \\ 1 \end{pmatrix}$; $\psi_2 = e^{\cdots}\begin{pmatrix} \emptyset \\ 1 \\ 1 \\ \emptyset \end{pmatrix}$ $E>0$

$\psi_3 = e^{\cdots}\begin{pmatrix} \emptyset \\ -1 \\ 1 \\ \emptyset \end{pmatrix}$; $\psi_4 = e\begin{pmatrix} -1 \\ \emptyset \\ \emptyset \\ 1 \end{pmatrix}$ $E<0$

$\Rightarrow$ Im relativistischem Limes, sind ψ_i **nie** Eigenzustände von S_z (weder für Teilchen noch für Antiteilchen)

7c) $[\vec{S}, H_D] = -i\hbar(\vec{\alpha}\times\vec{p})$ ($=0$, nur wenn $\vec{p} = \vec{0}$, oder wenn $\vec{S} \parallel \vec{p}$, z.B. $\vec{p} = (0,0,p_z) \Rightarrow [S_z, H_D(0,0,p_z)] = 0$)

7d) $[\vec{L}, H_D] = i\hbar(\vec{\alpha}\times\vec{p}) \Rightarrow [\underbrace{\vec{L}+\vec{S}}_{\vec{J}}, H_D] = 0$ Gesamtdrehimpuls is erhalten! (Rotationsinvarianz!)

7e) $\frac{1}{|p|}[\vec{S}\vec{p}, 0] \equiv 0$ IMMER!

Die Helizität ist immer eine gute Quantenzahl (deren Wert hängt aber natürlich vom Bezugsystem ab!)

7f) Chiralitätsoperator $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

Eigenwerte von γ_5

$$\det\begin{pmatrix} -\hat{W} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\hat{W} \end{pmatrix} = 0 \qquad \hat{W}^2 - \mathbb{1} = 0 \qquad \hat{W} = \pm\mathbb{1}$$

Eigenvektoren von γ_5

$$\hat{W} = \pm\mathbb{1} \qquad \begin{pmatrix} \mp\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mp\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} \qquad \hat{W} = \pm\mathbb{1} \quad \phi_1 = \pm\phi_2$$

Matrix der Eigenvektoren U (Basis-Trasformation Dirac $\rightarrow$ Chiral)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}_{ch} = U\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}}_{\text{Pauli Dirac}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varphi + \chi \\ -\varphi + \chi \end{pmatrix}$$

7g) • mit $m = 0$

$$[\gamma_5, H_D] = [\gamma_5, \hat{\alpha}p]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\right] p_i = \emptyset$$

• mit $m \neq 0$

$$[\gamma_5, \hat{\alpha}p + \hat{\beta}m] =$$

$$[\gamma_5, \hat{\beta}m] = 2m\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

γ_5 Kommutiert ~~mit~~ mit H_D nur für $m = 0$!

• Chiralität Projektor $\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ projiziert auf die Eigenvektoren von γ_5

$\underline{u}$ = Spinor, Lösung der Dirac Gl. in Pauli-Dirac Darstellung $= \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi \end{pmatrix}$

$$\Lambda_\pm \underline{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \chi \pm \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi \\ \pm\left(\chi \pm \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi\right) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda} \left(\Lambda_\pm \underline{u}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & \phi \\ \phi & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{pmatrix} \Lambda_\pm \underline{u} = \pm\frac{1}{2}\left(\Lambda_\pm \underline{u}\right)$$

Helizität Operator

für $m=0$
(wo $E = p$)

Die Eigenvektoren der Chiralität und Helizität Operatoren sind IDENTISCH, wenn $m = 0$

8.) "Kontinuitätsgleichung"

a) Ausgangpunkt ist die Klein-Gordon Gleichung:

$$(\Box + K_c^2)\,\phi(\vec{r},t) = 0 \quad , \text{ wobei } \Box = \partial_\mu \partial^\mu = -\nabla^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\text{und } \quad K_c = \frac{mc}{\hbar}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung und ihre Komplex Konjugierte mit ϕ^* (ϕ), und bekommen

$$\begin{cases} \phi^* \Box \phi = -K_c^2 \phi^* \phi \\ \phi \Box \phi^* = -K_c^2 \phi^* \phi \end{cases} \Rightarrow \quad \phi^* \Box \phi - \phi \Box \phi^* = 0$$

$$(\text{d.h. } \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* = 0)$$

Durch Addition und Subtraktion von einem gemischten Beitrag $\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi$ bekommt man

$$\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi^* + \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\mu \left[\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right] = 0$$

Wenn man die Gleichung mit $\frac{i\hbar}{2m}$ multipliziert, und die Summe über μ explizit schreibt, bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi \frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right]}_{\varrho} + \operatorname{div}\underbrace{\left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*\right)\right]}_{\vec{j}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right]$ ist jedoch nicht positiv definiert.

Die Lösungen der Klein-Gordon Gleichung lassen sich schreiben als

$$\psi(\vec{r},t) \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + \vec{p}\cdot\vec{x})} \quad \text{wobei } E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Deswegen man hat

$$\rho \propto \frac{E}{2mc^2}$$, die ist vom Vorzeichen von E abhängig.

c)

Wir können direkt den Wahrscheinlichkeitstrom herleiten aus:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) \qquad \left(\text{wobei } \rho(\vec{r},t) = \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{4}\psi_i^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = i\hbar\left[\psi^+\frac{\partial}{\partial t}\psi + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^+\right)\psi\right]$$

wobei die Zeitableitungen durch die Dirac Gleichung ersetzt werden können

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = \psi^+\left[c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right]\psi - \left[\left(c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi\right]^+\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}(\psi^+ c\,\vec{\alpha}\,\psi) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$