1. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 14.10.2011

1. **Bethe Integral**

   Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, kann die Schrödingergleichung auch im Impulsraum angeschrieben und gelöst werden. Für viele Potentiale $V(\vec{r})$ führt dies jedoch zu Problemen, wenn das transformierte Potential $\tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}')$ nicht existiert.

   (a) Zeigen Sie, dass z.B. das Coulomb-Potential eines Atomkerns mit der Kernladungszahl Z,
   $$V_{\text{Coulomb}}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{|\,\vec{r}\,|}\,, \tag{1}$$
   durch seine Langreichweitigkeit nicht ohne weiteres in den Impulsraum transformiert werden kann.

   (b) Das Problem aus (a) lässt sich elegant umgehen, wenn man anstatt des gewöhnlichen Coulomb-Potentials ein abgeschirmtes Yukawa-Potential der folgenden Form verwendet,
   $$V_{\text{Yukawa}}(\vec{r},\lambda) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2\,e^{-\lambda r}}{|\,\vec{r}\,|}\,, \tag{2}$$
   wobei der reelle Parameter $\lambda > 0$ die Stärke der Abschirmung bestimmt. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Yukawa-Potentials $\tilde{V}_{\text{Yukawa}}(\vec{k}-\vec{k}',\lambda)$ (im $\mathbb{R}^3$). Ermitteln Sie nun die Fourier-Transformierte des Coulomb-Potentials $\tilde{V}_{\text{Coulomb}}(\vec{k}-\vec{k}')$ in dem Sie von Ihrem Ergebnis für $\tilde{V}_{\text{Yukawa}}(\vec{k}-\vec{k}',\lambda)$ den Limes $\lambda \to 0$ bilden. Das Ergebnis, das Sie auf diese Weise erhalten, wird nach seinem Entdecker als "Bethe Integral" bezeichnet.

2. **Clebsch-Gordan-Koeffizienten**

   Betrachten Sie das Elektron eines Einelektronenatoms, das sich in einem angeregten Energie-Eigenzustand $|nl\frac{1}{2}jm_j\rangle$ mit den folgenden Quantenzahlen befinde: $n = 3$, $l = 1$, $j = 1/2$, $m_j = -1/2$. (Quantenzahlen in Standardnotation aus der Atomphysik, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$: Gesamtdrehimpuls.)

   (a) Wie groß ist der Erwartungswert für (i) die z-Komponente und für (ii) die x-Komponente des Spins $\vec{S}$ in diesem Zustand?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Sie bei einer Messung der y-Komponente des Spins den Messwert $-\hbar/2$ erhalten?

   Hinweis: Verwenden Sie die auf der Webseite der LVA zur Verfügung gestellte Tabelle für Clebsch-Gordan-Koeffizienten unter der folgenden URL:
   `http://quanten.at/quanten2_WS2011/links.html`

3. Gebundener Zustand des δ-Potentials

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung (SG) für ein anziehendes δ-Potential,

$$\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2\kappa}{m}\delta(x)\right]|E\rangle = E|E\rangle, \tag{3}$$

in den folgenden Schritten:

(a) Stellen Sie (3) im Impulsraum dar. Setzen Sie die Energie des gebundenen Zustands $|E\rangle$ mit $E = -q^2/2m$, $q > 0$ an und bestimmen Sie die Lösung der SG (bis auf eine Konstante) im Impulsraum.

(b) Geben Sie die Rücktransformation der Lösung aus Teil (a) in die Ortsdarstellung an und werten Sie diese zunächst nur im Punkt $x = 0$ aus, um q zu bestimmen. Bestimmen Sie die verbleibende Normierungskonstante durch Auswertung des Normierungsintegrals im Impulsraum und setzen Sie $\psi_E(x = 0) > 0$ voraus.

(c) Geben Sie die Lösung der SG im Ortsraum an. Welche Beziehung finden Sie somit zwischen der Breite der Wellenfunktion im Impulsraum und der im Ortsraum? Motivieren Sie die Richtigkeit Ihrer Ergebnisse auf physikalischer Basis.

Hinweis: Die Lösung im Ortsraum kann ohne Beweis z.B. aus Aufgabe 2 des zweiten Tutoriums der Quantentheorie I im WS10/11 übernommen werden: `http://quanten.at/quanten1_WS10/tutorium2.pdf`.
Fakultativ kann man die Lösung auch durch Rücktransformation des in (a) erhaltenen Ausdrucks gewinnen, z.B. mit Hilfe des Residuensatzes. Überlegen Sie sich in diesem Fall, in welcher Halbebene der Integrationsweg geschlossen werden muss, damit dieser Teil des Weges nicht zum Integral beiträgt.

Zu kreuzen: 1/2/3