

2. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 21.10.2011

1. Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild

In der Vorlesung wurde gezeigt (s. Folien 35f.), dass die Zeitentwicklung eines Zustandsvektors im Wechselwirkungsbild gegeben ist durch:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I, \quad (1)$$

mit $|\psi(t)\rangle_I = U_0^\dagger(t, t_0) |\psi(t)\rangle$. Dabei bezeichnet $|\psi(t)\rangle$ die Wellenfunktion im Schrödingerbild. Der Hamilton-Operator des Gesamt-Systems sei $H(t) = H_0(t) + V(t)$, wobei $V(t)$ eine (kleine) Störung darstellt, und $U_0(t, t_0)$ der zu $H_0(t)$ gehörende Zeitentwicklungsoperator ist.

- Erklären Sie qualitativ, warum sich bei einer gegenüber $H_0(t)$ sehr kleinen Störung $V(t)$ der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle_I$ sehr viel langsamer ändert als $|\psi(t)\rangle$.
- Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (1) zur Integralgleichung

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |\psi(t')\rangle_I \quad (2)$$

mit $|\psi(t_0)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle$ äquivalent ist.

- Lösen Sie Gl. (2) durch Iteration, d.h., zeigen Sie, dass man den Vektor $|\psi(t)\rangle_I$ in eine Potenzreihe entwickeln kann:

$$|\psi(t)\rangle_I = \left[\mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t'') + \dots \right] |\psi(t_0)\rangle_I. \quad (3)$$

Bemerkung: Diese Art von iterativer Lösung wird in der Störungstheorie eine wesentliche Rolle spielen. In erster Ordnung bricht man die Reihe in (3) nach dem ersten, zu $V_I(t')$ proportionalen Glied ab, während für größere Störungen auch höhere Potenzen von $V_I(t')$ berücksichtigt werden.

2. Bewegungsgleichung für nicht-hermitesche Systeme

- In der Vorlesung wurde die Bewegungsgleichungen für Operatoren und deren Erwartungswerte hergeleitet (s. Folien 30-33). Zeigen Sie die folgende *verallgemeinerte* Bewegungsgleichung für den Erwartungswert eines zeitunabhängigen Operators \hat{A} im Zustand $|\psi(t)\rangle$, wobei die Hermitizität des Hamiltonoperators \hat{H} *nicht* vorausgesetzt wird:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A} \hat{H} - \hat{H}^\dagger \hat{A} | \psi(t) \rangle. \quad (4)$$

Hinweis: Gehen Sie von der Schrödingergleichung $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ und der konjugierten Gleichung $-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = \langle \psi(t) | \hat{H}^\dagger$ aus und nutzen Sie die Kettenregel.

- Nehmen Sie nun an, dass \hat{H} hermitesch sei. Was folgt daraus für die zeitliche Entwicklung der Zustandsnorm $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$?

- (c) Betrachten Sie nun einen Hamiltonoperator der Form $\hat{H} = \hat{\mathcal{H}} - i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathcal{V}}$. Hierbei seien $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^\dagger$ und $\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}^\dagger$ hermitesche Operatoren und $\gamma \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante. Zeigen Sie mit Hilfe von (4), dass gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\frac{\gamma}{\hbar}\langle\psi(t)|\mathcal{V}|\psi(t)\rangle. \quad (5)$$

Welcher fundamentale Unterschied ergibt sich somit für die Zustandsnorm? Machen Sie sich das Ergebnis anhand folgenden Beispiels klar, wobei der Einfachheit halber ein eindimensionaler Hilbertraum mit normiertem Vektor $|1\rangle$ und Operatoren $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{V}} = \hat{1}$ angenommen werden soll: Geben Sie dazu die explizite Zeitabhängigkeit von $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ an mit $\gamma > 0$ und $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, d.h., $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$.

Hinweis: Solche sog. *effektiven* Hamiltonoperatoren werden z.B. für die Beschreibung offener Quantensysteme genutzt. Dabei stellt \mathcal{V} gerade die Kopplung des Systems \mathcal{H} an eine Umgebung dar, in welche Aufenthaltswahrscheinlichkeit abfließen kann, d.h., in welche das Teilchen “entkommen” kann. Dies ist z.B. beim Auskoppeln von Laserlicht aus einer Kavität (System) in das Labor (Umgebung) der Fall.

3. Ehrenfest-Theorem im harmonischen Oszillator

Betrachtet wird die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m im harmonischen Oszillatorpotential $V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$.

- (a) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $x_H(t), p_H(t)$ der Orts- bzw. Impulsvariablen im Heisenbergbild (kanonische Bewegungsgleichungen).
- (b) Drücken Sie die Erwartungswerte der Orts- und Impulsvariablen zum Zeitpunkt t durch ihre Anfangswerte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und die Zeit t aus. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Ehrenfest-Theorems (s. Folie 33) durch einen Vergleich dieser Ergebnisse mit den klassischen Lösungen für $x(t), p(t)$.
- (c) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[x_H(t_2), x_H(t_1)], [p_H(t_2), p_H(t_1)], [x_H(t_2), p_H(t_1)].$$

(Schrödingerbild und Heisenbergbild sollen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zusammenfallen.)

Zu kreuzen: 1/2/3