

3. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 4.11.2011

1. Spin-Mischung

Ein Elektron befinde sich in einem zeitlich konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B \vec{e}_y$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bei einer Messung von S_z den Messwert $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten, wenn das Elektron zum Zeitpunkt $t = 0$

(a) durch das statistische Gemisch mit Dichteoperator

$$\rho = p|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (1-p)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad p \in [0, 1]$$

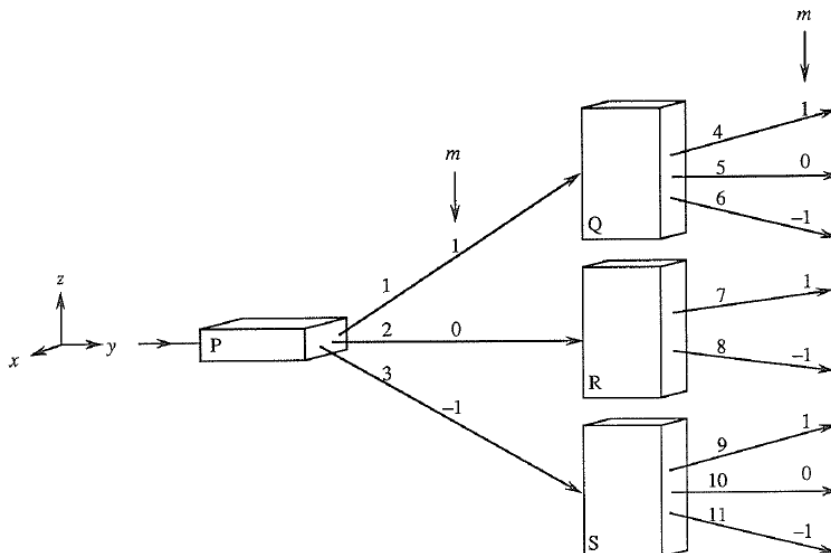
(b) durch den reinen Zustand

$$|\chi\rangle = \sqrt{p}|\uparrow\rangle + e^{i\delta}\sqrt{1-p}|\downarrow\rangle, \quad \delta \in [0, 2\pi), \quad p \in [0, 1]$$

beschrieben wird ($\sigma_z|\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle$, $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$). Vergleichen Sie die unter (a) und (b) gefundenen Ergebnisse als Funktion der Relativphase δ und geben Sie deren Differenz eine physikalische Bedeutung.

2. Nichtkommutative Messungen an Zustandsgemischen

Ein unpolarisierter Strahl von Spin-1-Teilchen (beschrieben durch eine Dichtematrix $\rho_{i,j} = \frac{1}{3}\delta_{i,j}$) falle in y -Richtung auf einen Stern-Gerlach-Magneten P ein, dessen Magnetfeld in x -Richtung zeigt (sh. Abbildung). Die drei Strahlen mit Quantenzahl $m = 0, \pm 1$ werden voneinander getrennt und durch drei weitere Magneten Q,R,S (mit Feld in z -Richtung) geschleust.



(a) Wie lauten die Dichtematrizen, die jeden der drei aus P austretenden Strahlen beschreiben? Handelt es sich dabei um reine Zustände?

- (b) Wie würde die Dichtematrix für einen Teilchenstrahl lauten, der aus Verschmelzung der beiden Strahlen 2 und 3 entsteht?
- (c) Erklären Sie, in wieviele Teile sich die Strahlen an den Magneten Q,R,S aufspalten bzw. wie groß die Intensitäten der jeweiligen Teilstrahlen sind (gemessen an der Intensität des einfallenden Strahls). *Hinweis:* Drücken Sie die Eigenzustände des L_x -Operators als Superposition von L_z -Eigenzuständen aus.

3. Molekylvibration

Betrachten Sie das Vibrationsverhalten des schleimhautreizenden Moleküls Stickstoffmonoxid (andere Freiheitsgrade des Moleküls werden vernachlässigt).

- (a) Werden bei einer Temperatur von $T = 25^\circ$ Celsius die angeregten Vibrationsfreiheitsgrade des Moleküls besetzt? Berechnen Sie dazu den mittleren Anregungszustand (i.e., die mittlere Energiequantenzahl n) und den entsprechenden Erwartungswert der Vibrationsenergie.
- (b) Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert der Vibrationsenergie im klassischen Grenzfall (i.e., für sehr hohe Temperaturen T) wie der Mittelwert der Energie des entsprechenden klassischen Systems verhält. Besprechen Sie Ihre Resultate in den beiden Grenzfällen $T \rightarrow 0, \infty$ physikalisch.

Hinweise: Verwenden Sie zur Lösung des Beispiels Ihr Wissen aus der Statistischen Physik und Ihre Ergebnisse aus dem 9. Tutorium, Bsp. 1 der QTVU1, WS10/11 (sh. dazu: http://www.quanten.at/quanten1_WS10/tutorium9.pdf). Ihre Ergebnisse erlauben Ihnen interessante Einblicke in aktuelle Experimente bei tiefen Temperaturen, in denen es gelungen ist, makroskopische Resonatoren in ihren quantenmechanischen Grundzustand zu versetzen (sh. dazu die folgenden Publikationen: <http://www.nature.com/nature/journal/v464/n7289/full/nature08967.html> und <http://www.sciencemag.org/content/330/6011/1604.full>).

4. Eulerwinkel

Zeigen Sie, dass die durch die drei Eulerwinkel definierte Drehung einer Wellenfunktion (sh. dazu im Skriptum Abb. 7.3 inkl. Bildunterschrift) durch den in Formel 7.17 (Skriptum) angegebenen Rotationsoperator bewerkstelligt wird. Drücken Sie zu diesem Zwecke die Drehungen um die Achsen η_1 und ζ_2 durch Drehungen um die y - und z -Achse aus.

Zu kreuzen: 1/2/3/4