

5. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 2.12.2011

1. Elektron im harmonischen Potential mit elektrischem Feld

Für ein Elektron im eindimensionalen harmonischen Potential mit konstantem elektrischem Feld betrachte man die Wechselwirkung mit dem E -Feld als Störung,

$$H = H_0 + W = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + W, \quad \text{mit } W = -qEx.$$

- Berechnen Sie die Energieeigenwerte des Oszillators in 2. Ordnung Störungstheorie und die Eigenfunktionen in 1. Ordnung Störungstheorie.
- Berechnen Sie die exakten Lösungen für dieses System indem Sie den Hamilton-Operator auf ein vollständiges Quadrat ergänzen. Zeigen Sie dadurch explizit, dass der harmonische Oszillator durch das elektrische Feld zwar räumlich verschoben wird, aber seine harmonische Form beibehält. Vergleichen Sie die entsprechenden Ergebnisse mit jenen aus (a). Stellen Sie insbesondere anhand von graphischen Darstellungen der Grundzustandswellenfunktionen aus (a) und (b) einen Vergleich Ihrer Lösungen an und diskutieren Sie die auftretenden Unterschiede.
- Welche physikalischen Aussagen können Sie auf Basis Ihrer Ergebnisse über die Polarisierbarkeit von Oszillatorzuständen machen? Wie hängt diese mit der Oszillatorfrequenz ω_0 und der Energiequantenzahl n zusammen?

2. Variationsverfahren

Der Hamiltonoperator eines dreidimensionalen, isotropen Oszillators mit der Masse m und der Eigenfrequenz ω_0 lautet:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \vec{x}^2.$$

Bestimmen Sie eine Näherung E_0^{var} für die Grundzustandsenergie E_0 von H mit Hilfe des Variationsverfahrens. Verwenden Sie hierzu die Testfunktionen

$$\psi_T(\vec{x}, \alpha) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{8\pi}} e^{-\alpha r/2}, \quad r = |\vec{x}|,$$

mit dem Variationsparameter $\alpha > 0$.

- Zeigen Sie zunächst, dass diese Funktionen auf eins normiert sind und berechnen Sie dann den Energie-Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[\psi_T] &= \langle \psi_T(\vec{x}, \alpha) | H | \psi_T(\vec{x}, \alpha) \rangle, \\ &= \int d^3x \psi_T^*(\vec{x}, \alpha) H \psi_T(\vec{x}, \alpha). \end{aligned}$$

- Bestimmen sie das Minimum von $E[\psi_T]$ durch Variationsrechnung und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Grundzustandsenergie E_0 .

3. Atomkern mit endlicher Ausdehnung

Betrachten Sie den Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms. Neben den Feinstruktur-Korrekturen zur Grundzustandsenergie wie im Skriptum besprochen (Kapitel 9.1.1), können im Experiment auch Energiekorrekturen durch den endlichen Radius des Atomkerns spektroskopisch festgestellt werden. Diese durch die endliche Ausdehnung des Atomkerns verursachte Störung soll nun abgeschätzt werden.

- (a) Bestimmen Sie zuerst die entsprechend modifizierte potentielle Energie, die vom Elektron in der Nähe des Kerns wahrgenommen wird. Nehmen Sie als Modell für den Atomkern eine Kugel mit Radius R und Ladung Ze an, die über das ganze Volumen der Kugel homogen verteilt ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Kernradius $R \approx R_0 A^{1/3}$ (mit $R_0 \approx 1.5 \times 10^{-15}m$ und A : Nukleonenzahl), wodurch $R \ll a_0$ (mit a_0 : Bohr-Radius des Elektrons).

- (b) Diese Modifikation des Coulomb-Potentials führt zu einer Energiekorrektur des elektronischen Grundzustands, die Sie nun in 1. Ordnung Störungstheorie berechnen sollen. Diskutieren Sie, wieso derartige Korrekturen im Experiment am besten durch Messung an verschiedenen Isotopen des gleichen Atoms festgestellt werden können. Wie groß sind die von Ihnen gefundenen Energiekorrekturen im Vergleich mit den Feinstruktur-Verschiebungen aus dem Skriptum?

Zu kreuzen: 1/2/3