6. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 16.12.2011

1. **Zwei-Niveau-System im Strahlungsfeld: Rabi-Oszillationen**

   Wir betrachten ein Zwei-Niveau-System bestehend aus einem Grundzustand $|-\rangle = \binom{0}{1}$ und einem angeregten Zustand $|+\rangle = \binom{1}{0}$. Die Übergangsfrequenz der Niveaus sei ω_0, d.h., der ungestörte Hamiltonoperator des Systems kann mit Hilfe der Pauli-Matrix σ_z geschrieben werden als:

   $$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z \ .$$

   Das System wechselwirke mit einem äußeren Strahlungsfeld, das durch einen Störoperator der Form

   $$H_I(t) = -\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_- \, e^{i\omega t} + \sigma_+ \, e^{-i\omega t}\right)$$

   beschrieben werde, wobei

   $$\sigma_- = |-\rangle\langle +| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = |+\rangle\langle -| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Hierbei ist ω die Frequenz des Strahlungsfeldes und Ω die sogenannte Rabi-Frequenz, die proportional zur Feldstärke des Strahlungsfeldes ist. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems aus Atom und Strahlungsfeld lautet also $H(t) = H_0 + H_I(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Grundzustand, d.h., $|\psi(0)\rangle = |-\rangle$.

   (a) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung $i\hbar \; d/dt|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$ zu obiger Anfangsbedingung. Führen Sie dazu zunächst die Transformation $|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t\sigma_z/2}|\tilde{\psi}(t)\rangle$ durch, und zeigen Sie, dass $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ der Gleichung $i\hbar \; d/dt|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle$ genügt, wobei der Hamiltonoperator

   $$\tilde{H} = \frac{\hbar(\omega_0 - \omega)}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_- + \sigma_+\right)$$

   zeitunabhängig ist.

   Hinweis: Nutzen Sie (ohne Beweis) die Beziehungen $e^{i\omega t\sigma_z/2}\sigma_\pm e^{-i\omega t\sigma_z/2} = \sigma_\pm e^{\pm i\omega t}$. Berechnen Sie die Lösung $|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-i\tilde{H}t/\hbar}|-\rangle$ der transformierten Schrödingergleichung unter Verwendung folgender Identität für Drehungen um einen Winkel θ: $\exp[i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}] = \cos(\theta)\mathbb{1} + i\sin(\theta)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$. Hierbei ist $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger *Einheits*vektor, und $\vec{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen.

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe der in (a) konstruierten Lösung, dass die Wahrscheinlichkeit, das System zum Zeitpunkt t im angeregten Zustand $|+\rangle$ zu finden, durch

   $$P_+(t) = |\langle +|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}\sin^2\left(\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \Omega^2}\,\frac{t}{2}\right)$$

   gegeben ist. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $P_+(t)$ für resonantes ($\omega = \omega_0$) und nicht-resonantes Treiben ($\omega \neq \omega_0$) und interpretieren Sie das Verhalten physikalisch. Unter welcher Bedingung an die Frequenz des treibenden Strahlungsfeldes ω wird $P_+(t)$ maximal?

(c) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $P_+(t)$ in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie. Vergleichen Sie das Resultat mit der exakten Lösung aus Teil b) und leiten Sie eine Bedingung für die Anwendbarkeit dieser Näherung ab.

2. **Beta-Zerfall im Tritium-Atom**

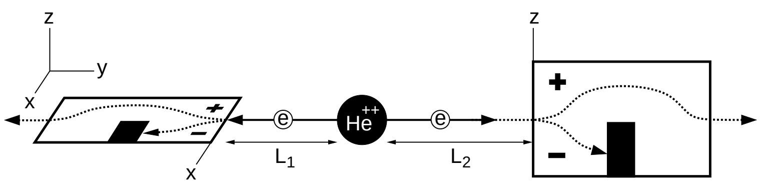
Um die Masse des Elektron-Antineutrinos $\bar{\nu}_e$ zu bestimmen, betrachtet man im Experiment den Zerfall eines instabilen Tritium-Atoms, dessen Kernladung sich durch Beta-Zerfall plötzlich ändert, $^3\mathrm{H} \rightarrow\ ^3\mathrm{He}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$. Beantworten Sie zu diesem Experiment folgende Fragen:

(a) Schätzen Sie die klassischen Zeitskalen ab (i) mit der das Elektron im Grundzustand von ^3H den Atomkern umrundet bzw. (ii) mit der das aus dem Kern emittierte Elektron die Elektronenhülle durchquert. Beurteilen Sie auf Basis Ihrer Abschätzung welche Näherung Sie für die zeitabhängige Störungsrechnung im Punkt (b) verwenden können.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W mit der das im Grundzustand befindliche Hüllenelektron des ^{3}H–Atoms nach dem Zerfallsprozess im Grundzustand des ^{3}He$^+$–Ions zu finden sein wird. (Alle auftretenden Integrale sollen explizit berechnet werden, sodass Sie für die gefragte Übergangswahrscheinlichkeit W einen analytischen Ausdruck anschreiben können.)

3. **Verschränkung im Helium-Atom**

Im Grundzustand des Heliumatoms befinden sich die beiden Elektronen in einem Singlett-Zustand mit Gesamtspin $s = 0$. Das Atom werde nun durch einen Laserpuls doppelt ionisiert, d.h. dass beide Elektronen durch die Energie des Laserpulses aus einem Bindungszustand in einen Kontinuumszustand gehoben werden und einen zweifach positiv geladenen Atomkern (He^{++}) zurücklassen. Sie können nun annehmen, dass die beiden Elektronen nach dem Ionisierungsprozess weiterhin durch einen Singlett-Zustand beschrieben sind, selbst wenn sie nach der Emission in unterschiedliche Raumrichtungen eine große räumliche Distanz zueinander aufweisen.



(a) Verwenden Sie eine Clebsch-Gordan-Tabelle um zu zeigen, wie sich der Singlett-Zustand $|s = 0, m_s = 0\rangle$ in der Produktbasis der beiden Elektronen $|s_1, m_{s,1}\rangle$, $|s_2, m_{s,2}\rangle$ anschreiben lässt. Handelt es sich bei dem Singlett-Zustand um einen "verschränkten Zustand"? (Verschränkte Zustände sind solche, die sich nicht als Produkte $|s_1, m_{s,1}\rangle \otimes |s_2, m_{s,2}\rangle$ anschreiben lassen. Der Zustand eines verschränkten Teilchens lässt sich somit nicht unabhängig von den jeweiligen verschränkten Partnerteilchen beschreiben.)

(b) Es werde nun zuerst an einem der beiden Elektronen der Wert $\hbar/2$ für die Observable S_α gemessen, wobei α die Projektion des Spins auf die negative x-Richtung angibt (sh. obige Abbildung eines entsprechenden Stern-Gerlach-Apparats). Welches Ergebnis können Sie im Mittel für eine darauffolgende Messung (i) von S_z und (ii) von S_x am zweiten Elektron erwarten?

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in beiden Stern-Gerlach-Filtern eine positive (+) Spin-Projektion zu messen, wenn die beiden Achsen der Spin-Filter einen relativen Winkel von θ zueinander aufweisen (in obiger Abbildung $\theta = \pi/2$.) Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.

Bemerkung: Ihre Ergebnisse in den obigen Punkten illustrieren mehrere der fundamentalen Eigenschaften der Quantentheorie: Dass durch den Kollaps der Wellenfunktion bei der Messung an einem der beiden Teilchen auch der Zustand des anderen Teilchens festgelegt wird - selbst wenn sich dieses räumlich weit entfernt aufhält - ist eine Konsequenz der quantenmechanischen "Nichtlokalität". Letztere folgt wiederum aus dem Superpositionsprinzip und der probabilistischen Naturbeschreibung durch die Quantentheorie. Der Umstand, dass der Messwert am zweiten Teilchen durch die Art der Messung am ersten Teilchen (wie z.B. die Projektionsachse bei der Spin-Messung) mitbeeinflusst wird, wird als "Quanten-Kontextualität" bezeichnet. Beide dieser Eigenschaften sind aus der klassischen Physik vollkommen unbekannt und haben bei der Entwicklung der Quantenmechanik zu zahlreichen Diskussionen geführt. Unter anderem wies z.B. Einstein darauf hin, dass die Korrelationen zwischen den beiden räumlich getrennten Elektronen nur durch eine "spukhafte Fernwirkung" erklärt werden können. Die daraus gezogene Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie keine vollständige Theorie sei, sondern noch zusätzliche "verborgene Parameter" beinhalte, ließ sich jedoch mittlerweile im Experiment widerlegen. Was Einstein jedoch beruhigt haben dürfte, ist der Umstand dass durch die instantane "Fernwirkung" zwischen den beiden Elektronen keine Information übertragen werden kann und somit das Kausalitätsgesetz der speziellen Relativitätstheorie nicht verletzt wird.

Zu kreuzen: 1a/1bc/2/3