7. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 13.01.2012

1. Fermionen in optischer Falle

Zwei nicht-wechselwirkende identische Spin-1/2-Atome werden nach starker Abkühlung in einer optischen Falle gefangen, deren Potential als harmonisch angenommen werden kann (eindimensionales Problem $V(x) = m\omega^2 x^2/2$).

(a) Wodurch sind die drei niedrigsten Energieeigenwerte E_0, E_1, E_2 gegeben und wie groß sind deren Vielfachheiten (Entartungsgrade)?

(b) Geben Sie für jeden der drei zu den Energien E_0, E_1, E_2 gehörigen Eigenräume ein orthonormiertes Basissystem an (in Ketschreibweise).

(c) Das Zweiteilchensystem sei im tiefsten Energieeigenzustand für den beide Spins $m_1 = m_2 = -1/2$. Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit *ein* Teilchen im Intervall $(-\infty, 0)$ zu messen und *ein* Teilchen im Intervall $(0, +\infty)$? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

(d) Lösen Sie die Punkte (a) und (b) für den Fall dass die beiden Teilchen voneinander unterscheidbar sind.

2. Wechselwirkende Bosonen

In diesem Beispiel sollen nun wechselwirkende Bosonen in einer optischen Falle betrachtet werden. Das zu behandelnde System bestehe aus zwei identischen Spin-1-Teilchen in drei Raumdimensionen, beschrieben durch den Hamiltonoperator H,

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)} \tag{1}$$

$$H_0^{(i)} = \frac{(\vec{p}^{\,(i)})^2}{2m} + V(r^{(i)}), \; i = 1, 2, \quad W = \lambda\, \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}, \, \lambda \in \mathbb{R}^+ , \tag{2}$$

wobei $V(r)$ ein Einteilchenpotential sei, welches gebundene Einteilchenzustände $|nlm_l\rangle$ zu bekannten Einteilchenenergien ε_{nl} besitzt.

(a) Geben Sie die Grundzustandsenergie E_0^0 von H_0, den entsprechenden Entartungsgrad und eine normierte Basis des zugehörigen Eigenraums an.

(b) Berechnen Sie exakt die durch die Spin-Wechselwirkung W bedingte Aufspaltung des Energieniveaus E_0^0.

3. Streuung am Delta-Potential

Betrachten Sie das eindimensionale Streuproblem am Deltapotential, das durch folgende Schrödingergleichung beschrieben wird,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{\hbar^2\kappa}{2m}\delta(x)\right]\psi = E\psi\,.$$

Im Vergleich zu Bsp. 3 des ersten Tutoriums soll hier der Fall einer abstoßenden Deltafunktion untersucht werden ($\kappa > 0$).

(a) Lösen Sie das Streuproblem unter Annahme einer von links einfallenden ebenen Welle mit Wellenzahl k.

(b) Zeigen Sie, dass sich Ihre Lösung in der folgenden Form schreiben lässt (wie in der Vorlesung besprochen):

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{ikx} + f(k)e^{ik|x|}\right]$$

Wie lautet im vorliegenden Fall die Streuamplitude $f(k)$?

(c) Zeigen Sie nun explizit, dass Sie zu demselben Ergebnis auch mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung gelangen können,

$$\psi_k(x) = \psi_k^0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G_0^+(k; x, x') U(x') \psi_k(x') \, .$$

Bestimmen Sie die eindimensionale Greensche Funktion mittels Fourier-Ansatz,

$$G_0^+(k; x, x') = G_0^+(k; x - x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, G_0^+(k; q) \, e^{iq(x-x')} \, .$$

Die Fourier-Transformierte $G_0^+(k; q)$ erhalten Sie durch Einsetzen des Fourier-Ansatzes in die Bestimmungsgleichung $(\Delta + k^2) G_0^+(k; x, x') = \delta(x - x')$. Verwenden Sie weiters dass gilt,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{ia}{\omega^2 - a^2 + i\varepsilon} \, e^{i\omega x} \right] = e^{ia|x|}, \quad a \in \mathbb{R} \, .$$

4. Streutheorie

(a) Ausgehend von den folgenden Beziehungen,

$$H = H_0 + V, \quad G^{\pm} = (E - H \pm i\varepsilon)^{-1}, \quad G_0^{\pm} = (E - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} \, ,$$

soll die Gültigkeit der sogenannten Dyson-Gleichung gezeigt werden,

$$G^{\pm} = G_0^{\pm} + G_0^{\pm} \, V \, G^{\pm} \, .$$

(b) Leiten Sie ausgehend von

$$|\psi_{\vec{k}}^{\pm}\rangle = |\vec{k}\rangle + G^{\pm} V |\vec{k}\rangle$$

und (a) die Lippmann-Schwinger-Gleichung her.[1]

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehungen aus (a) und (b), dass die Streuzustände folgende Orthogonalitätsbeziehung erfüllen:

$$\langle \psi_{\vec{k}'}^{+} | \psi_{\vec{k}}^{+} \rangle = \langle \psi_{\vec{k}'}^{+} | \vec{k} \rangle - \langle \psi_{\vec{k}'}^{+} | V (E' - H_0)^{-1} | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \, .$$

Zu kreuzen: 1/2/3/4

[1] Um Ihr Ergebnis in Übereinstimmung mit Gl. (11.25) aus dem Skriptum zu bringen, ist zu beachten, dass in 4(a) die Greensche Funktion der Schrödingergleichung verwendet wird, im Skriptum jene der Helmholtzgleichung (sh. dazu Skriptum Seite 170).