Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

1. Plenum zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

<u>PLENUM</u>: Donnerstag, 11.10.2012

Lösung.

Zeitabhängige Störungstheorie: Magnetische Spinresonanz

a)

$$H = -\gamma(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_r)\mathbf{S} = -B_z \underbrace{g_s\mu_B\frac{\hbar}{2}}_{C}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - g_s\mu_B B\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\\ \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) & 0\end{pmatrix}$$

$$H = \underbrace{-CB_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{H_0}\underbrace{-CB\begin{pmatrix}0 & e^{-i\omega t}\\ e^{i\omega t} & 0\end{pmatrix}}_{V(t)}$$

b)

$$a^{(1)}_{\downarrow\uparrow}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int\limits_0^t dt' \langle\downarrow|V(t')|\uparrow\rangle e^{i\omega_{fi}t'} = i\frac{CB}{\hbar}\frac{\sin\left(\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}t\right)}{\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}}e^{i\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}t}$$

$$P^{(1)}_{\downarrow}(t) = \frac{(CB)^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}\right)^2}$$

c) Die Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild lautet:

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = V_I(t)|\Psi(t)\rangle.$$

Man kann nun einen beliebigen Zustandsvektor des Systems nach Eigenfunktionen von H_0 entwickeln, wobei die Entwicklungskoeffizienten zeitabhängig sind:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \sum_{n=\downarrow,\uparrow} b_n(t)|n\rangle.$$

Setzt man dies in die Schrödingergleichung ein, geht ins Schrödingerbild zurück und projiziert, unter Ausnutzung der Orthonormalität der Eigenfunktionen von H_0 die Entwicklungskoeffizienten heraus, so erhält man:

$$i\hbar\partial_t b_m(t) = \sum_{n=\downarrow,\uparrow} exp\left(i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t\right)\langle m|V|n\rangle b_n(t) = \sum_{n=\downarrow,\uparrow} exp\left(i\omega_{mn}t\right)V_{mn}b_n(t).$$

Einsetzen der Matrixelemente liefert 2 gekoppelte Differentialgleichungen für die beiden Koeffizienten:

$$i\hbar\partial_t b_\downarrow(t) = -CBe^{i(\omega+\omega_{\downarrow\uparrow})t}b_\uparrow(t)$$
$$i\hbar\partial_t b_\uparrow(t) = -CBe^{-i(\omega+\omega_{\downarrow\uparrow})t}b_\downarrow(t).$$

Löst man dieses Gleichungssystem und verwendet die Anfangsbedingung, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ befindet ($b_\downarrow(0) = 0$, $b_\uparrow(0) = 1$), so ergibt sich für den gesuchten Koeffizienten:

$$b_\downarrow(t) = \frac{CB}{\hbar}\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}e^{i\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}t} \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{1}{2\hbar}\sqrt{4(CB)^2 + \hbar^2(\omega+\omega_{\downarrow\uparrow})^2}$$

und somit

$$P_\downarrow(t) = \frac{(CB)^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2(\Omega t)}{\Omega^2}.$$

d) Lösung siehe Folien

1. Plenum - Zeitabhängige Störungstheorie

Magnetische Spinresonanz

Thomas Schäfer

11. Oktober 2012

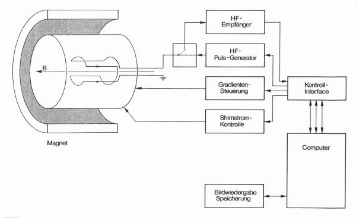
Grundbegriffe der zeitabhängigen Störungstheorie

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{zeitunabhängig}} + \underbrace{V(t)}_{\text{zeitabhängig}}$$

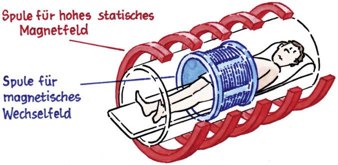
- Anfangszustand (initial state) $|\Psi_i\rangle$
- Endzustand (final state) $|\Psi_f\rangle$
- Übergangsamplitude $a_{fi}(t)$
- Übergangswahrscheinlichkeit $P_{fi} = |a_{fi}|^2$
- 1. Ordnung Störungstheorie ($|\Psi_i\rangle \neq |\Psi_f\rangle$)

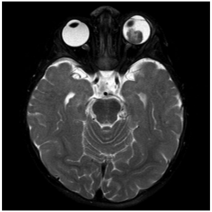
$$\boxed{a_{fi}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle\Psi_f|V(t')|\Psi_i\rangle e^{i\omega_{fi} t'}}$$

Kernspintomographie



E. Zeitler: Kernspintomographie





MRT-Aufnahme, http://pictures.doccheck.com/

T1-Relaxation:
stark abhängig von Wärmeleitfähigkeit
$\Rightarrow$Gewebeart

Vergleich Störungstheorie - exakte Lösung

- exakte Lösung

$$P_{\downarrow}(t) = \frac{(CB)^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2(\Omega t)}{\Omega^2}$$

$$\text{mit} \quad \Omega = \frac{1}{2\hbar}\sqrt{4(CB)^2 + \hbar^2(\omega + \omega_{\downarrow\uparrow})^2} \quad \text{und} \quad C = g_s \mu_B \frac{\hbar}{2}$$

- erste Ordnung Störungstheorie

$$P_{\downarrow}^{(1)}(t) = \frac{(CB)^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2} t\right)}{\left(\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}\right)^2}$$

Vergleich Störungstheorie - exakte Lösung