2. Plenum: "Bornsche Nährung"

a) Ausführung der Integrationen gibt:

$\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\,\frac{V(r)}{r}\,e^{i(kr+\vec{k}\cdot\vec{r})} = \frac{m}{\hbar^2\,\cancel{2\pi}}\int_0^{+\infty} dr\, r V(r)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=}\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)} = -\frac{m}{\hbar^2}\,\cancel{2\pi}\int_0^{\infty} dr\, rV(r)\int_1^{-1} dy\, e^{ikr(1+y)}$$

$$= \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\, e^{ikr}\,\frac{e^{ikry}}{ikr}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{m}{i\hbar^2 k}\int_0^{+\infty} dr\, V(r)\,\left(e^{2ikr}-1\right)$$

In unserem Fall $V(r) = V_0 e^{-r/r_0}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{2mV_0}{\hbar^2}\,\frac{r_0^2}{1-2ikr_0}\right|$

Deswegen $\left|\frac{2mV_0}{\hbar^2}\,\frac{r_0^2}{1-2ikr_0}\right| \ll 1$

d.h. $\left|2\,\frac{mr_0^2V_0}{\hbar^2}\,\frac{1+2ikr_0}{1+4k^2r_0^2}\right| = 2\,\frac{mr_0^2V_0}{\hbar^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+4r_0^2k^2}} \ll 1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{m r_0^2 V_0} \gg \frac{1}{\sqrt{1+4k^2r_0^2}}}$$

Bemerkungen: hier ist $\frac{\hbar^2}{mr_0^2V_0}$ ein dimensionsloses Maß für die Stärke und die Reichweite des Potentials $V(r)$; die Energieabhängigkeit steckt im Produkt kr_0 in der Funktion auf dem rechten Seite. Diese Funktion von kr_0 fällt monoton ab und verschwinden für $kr_0 \to +\infty$

Deswegen: Bornsche Nährung ANWENDBAR
- auch bei kleinen Energie für genügend schwaches bzw kurzreichweitiges Potential
- auf jeden Fall aber bei genügenden hoher Energie

b) Die Streuamplitude in erster Bornschen Nährung läßt sich schreiben als

$$f_{\text{Born}}(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, V(\vec{r})\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\vec{q}) \quad ,$$

wobei $|\vec{q}| = q = |\vec{k'}-\vec{k}| = 2k\sin\theta/2$

Für Zentralpotentiale (wie in unserem Fall) ist

$$\tilde{V}(q) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{(2\pi)} \int_0^{+\infty} dr\, r^2 V(r) \int_0^{\pi} d\tilde{\theta}\, \sin\tilde{\theta}\, e^{-iqr\cos\tilde{\theta}} = \frac{4\pi}{q}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\sin(qr)$$

Mit der expliziten Ausdrück unseres Potential, bekommen wir

$$\tilde{V}(q) = V_0\frac{4\pi}{q^3}\int_0^{+\infty} dy\; y \sin y\; e^{-y/qr_0} = V_0\, 4\pi r_0^3 \times \frac{2}{\left[1+(q\cdot r_0)^2\right]^2}$$

[Hinweis für das Integral $\int_0^{+\infty} dy \underbrace{y}_{A(y)} \underbrace{\sin y\, e^{-y/q_0 r_0}}_{B'(y)} = \cancel{A(y)B(y)}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{A'(y)}_{1} B(y)\, dy$.

Deswegen, bekommen wir

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Born}} = |f(\theta,\cancel{\phi})|^2 = \left(\frac{2m V_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \times \frac{4}{\left[1+(q r_0)^2\right]^4}$$

nicht ϕ-abhängig!

Zur Berechnung des totalen Streuquerschnitts integriere gemäß

$q^2 = 2k^2(1-\cos\theta) \Rightarrow q\,dq = -k^2\, d(\cos\theta)$. Deswegen $\int d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)$.

$$= \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k} q\,dq \;\ldots\; = \frac{2\pi}{k^2 r_0^2}\int_0^{2kr_0} x\, dx \qquad \text{wobei } x \equiv q r_0$$

Das Integral läßt sich schreiben, als

$$\sigma_{TOT}\Big|_{Born} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Born} = \frac{2\pi}{r_0^2 k^2} \int_0^{2kr_0} dx \left(\frac{2m V_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4x}{(1+x^2)^4} = 2\pi \left(\frac{2m V_0 r_0^2}{\hbar^2}\right)^2 \int_0^{2kr_0} \frac{4x}{(1+x^2)^4}$$

$$= 2\pi \left(\frac{2m V_0 r_0^2}{\hbar^2 k}\right) \times \frac{2}{3} \frac{x^2(3+3x^2+x^4)}{(1+x^2)^3}\Bigg|_{x=2kr_0}$$

Extra.) "Über die Lippmann - Schwinger Gleichung"

*) Ausgangspunkt:

$$|\psi_k^\pm\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^\pm(k)\, U\, |\psi_k^\pm\rangle$$

$$\langle\vec{r}|\psi_k^\pm\rangle = \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \langle\vec{r}|G_0^\pm \cdot U|\psi_k^\pm\rangle$$

Wir fügen eine vollständige $\mathbb{1}$ hinter $G_0^\pm$ und hinter U ein. Damit ergibt sich:

$$\psi^\pm(\vec{k},\vec{r}) = \Phi(\vec{k},\vec{r}) + \int d^3r' \int d^3r'' \langle\vec{r}|G_0^\pm|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|U|\vec{r}''\rangle\langle\vec{r}''|\psi_k^\pm\rangle$$

$$= \Phi(k,\vec{r}) + \int d^3r' \int d^3r'' \, G_0^\pm(\vec{k},\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, \delta(\vec{r}'-\vec{r}'')\, \psi^\pm(k,\vec{r}'')$$

Deswegen

$$\psi^\pm(\vec{k},\vec{r}) = \Phi(k,\vec{r}) + \int d^3r' \, G^\pm(\vec{k},\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, \psi^\pm(k,\vec{r}')$$

wobei $G_0^\pm = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|r-r'|} \xrightarrow[|\vec{r}-\vec{r}'|\sim r-\hat{r}\cdot\vec{r}']{r\gg\infty} -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\mp ik\hat{r}\vec{r}'}\cdot e^{\pm ikr}}{r}$

$$\psi^\pm(\vec{k},r) = \Phi(k,\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} e^{\pm ikr} \int d^3r' \, e^{\mp i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}\, U(\vec{r}')\, \psi^\pm(k,\vec{r}')$$

※) Ausgangspunkt: $\left[\nabla^2 + k^2\right] G_0(k, \vec{R}) = \delta(\vec{R})$

Nach Fouriertransformation:

$$(-K^2 + k^2)\,\hat{G}_0(k,\vec{K}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{G}_0(k,\vec{K}) = \frac{1}{k^2 - K^2}$$

$\hat{G}_0(k,\vec{K})$ hat Pole auf der reellen Achse $(k = \pm K)$, deswegen muss man die Pole mit $\pm i\epsilon$ verschieben

$$\tilde{G}^{\pm} = \frac{1}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon}$$

"+" = Retardiert
"−" = Advanziert

Wenn wir nun die anti Fouriertransformierte Funktion rechnen

$$G_0^{(\pm)}(k,\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3K \,\frac{e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty} K^2 dK \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \,\frac{e^{iKR\cos\theta}}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon} =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 i R}\int_{-\infty}^{+\infty} K\,dK \,\frac{e^{iKR} - e^{-iKR}}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon}$$

Das Integrand ist gerade in $K \to -K$

Mit der Partialbruchzerlegung

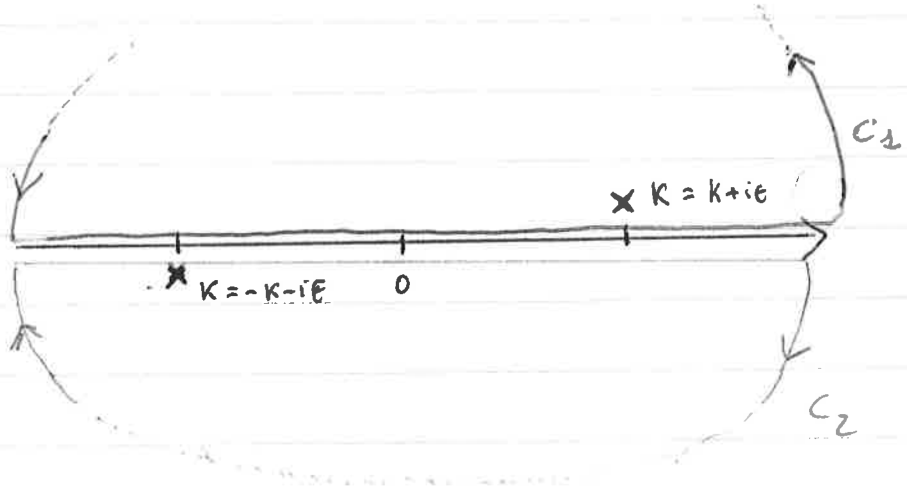
$$\frac{1}{k^2 - K^2} = \left[\frac{1}{K - k} + \frac{1}{K + k}\right]\left(-\frac{1}{2K}\right)$$

Können wir das Integral so umschreiben:

$$G_0(k,R) = \frac{i}{16\pi^2 R}\,(J_1 - J_2), \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, e^{iKR}\left(\frac{1}{K-k} + \frac{1}{K+k}\right) \\ J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, e^{-iKR}\left(\frac{1}{K-k} + \frac{1}{K+k}\right) \end{cases}$$

Die Pole sind in $K = \pm(k + i\epsilon)$ $\left(\text{oder } \pm(k - i\epsilon)\right)$

1. Im erste Fall (retardierte Green Funktion)



kann man den Pfad des Integrals J_1 über C_1 schliessen (das Integral auf C_1 ist null wegen e^{iKR}), und den Pfad des J_2 über C_2 schliessen (das Integral auf C_2 ist null wegen e^{-iKR}).

Deswegen

$$\begin{cases} J_1 = 2\pi i\, e^{ikR} & (\text{der einzige Pole ist } K = k + i\epsilon) \\ J_2 = -2\pi i\, e^{-ikR} & (\text{" " " ist } K = -k - i\epsilon) \end{cases}$$

Mit einen ähnlichen Rechung für $K = \pm(k - i\epsilon)$ bekommen wir das finale Ergebniss, und zwar

$$G_0^{\pm}(k, \vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikR}}{R}$$