Lösungen zum 1. Tutorium QT II

1) a) $m = -1/0/1$

b) $$H = -g_c\mu_B B_z \hbar \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - g_c \mu_B B_x \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$H = C \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi(0)\rangle = |-1\rangle$$

i) $$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i/\hbar\, Ht} |n\rangle\langle n|\psi(0)\rangle = \sum_n e^{-i/\hbar\, E_n t} |n\rangle\langle n|\psi(0)\rangle$$

$\nwarrow$ EZ von H

Diagonalisierung von H und Einsetzen:

$$\{|\psi_S(t)\rangle\}_{L_z} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2\cos(\sqrt{3}ct/\hbar) - i\sin(\sqrt{3}ct/\hbar)\sqrt{3} \\ 1 - \cos(\sqrt{3}ct/\hbar) - i\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}ct/\hbar) \\ -1 - \cos(\sqrt{3}ct/\hbar) \end{bmatrix}$$

---

ii) $$|\psi_H(t)\rangle = |\psi_S(0)\rangle = |-1\rangle$$

iii) $$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger |\psi_S(t)\rangle = e^{i/\hbar\, H_0 t} |\psi_S(t)\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{n \\ \text{EZ von } H_0}} e^{+i/\hbar\, H_0 t} |n\rangle\langle n|\psi_S(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \{|\psi_I(t)\rangle\}_{L_z} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (2\cos(\sqrt{3}ct/\hbar) + i\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}ct/\hbar) + 1 \\ -\cos(\sqrt{3}ct/\hbar) - i\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}ct/\hbar) + 1 \\ \cos(\sqrt{3}ct/\hbar) - 1 \end{bmatrix}$$

---

c) Erwartungswerte sind in allen Bildern gleich (siehe Skriptum)

bspw. Schrödinger Bild:

$$\langle L_z \rangle = \langle \psi_S(t) | L_z | \psi_S(t) \rangle = \frac{\hbar}{3}\left(-1-2\cos(\sqrt{3}\,ct/\hbar)\right)$$

2, a) $$H(\alpha) = \frac{4\alpha^2\hbar^2(m+M) + m^2 M\omega^2}{8\alpha m M}, \quad \partial_\alpha H(\alpha) = 0, \quad \alpha \text{ positiv}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar\sqrt{1+\frac{m}{M}}} \quad \Rightarrow H(\alpha) = \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

b) $$E_0^{(0)} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$
$$E_1^{(0)} = \frac{1}{4}\hbar\omega\frac{m}{M}$$
$$E_2^{(0)} = -\frac{1}{16}\hbar\omega\frac{m^2}{M^2}$$

durch Leiteroperatoren und Störungstheorie

aus a): $$H(\alpha) = \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1+\frac{m}{M}} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\frac{m}{M}-\frac{1}{16}\frac{m^2}{M^2}+\dots\right)$$