$\boxed{\text{QT II Üb. 2}}$

3) Welche Zustände verbindet $\hat{x}^4 = \frac{x_0^4}{4}(a + a^\dagger)^4$ mit $|0\rangle$?

$$(a + a^\dagger)^4 \qquad |0\rangle$$
$$= (a + a^\dagger)^3 \qquad |1\rangle$$
$$= (a + a^\dagger)^2 \qquad \big(|0\rangle \quad \sqrt{2}\,|2\rangle \big)$$
$$= (a + a^\dagger) \qquad \big(3\,|1\rangle \quad \sqrt{6}\,|3\rangle \big)$$
$$= \qquad \big(3\,|0\rangle \quad 6\sqrt{2}\,|2\rangle \quad 2\sqrt{6}\,|4\rangle \big)$$

Also $V_{20} = \langle 2 | x^4 f_0 | 0 \rangle = f_0\, 6\sqrt{2}\, \frac{x_0^4}{4}$, $V_{40} = f_0\, 2\sqrt{6}\, \frac{x_0^4}{4}$;
$\omega_{20} = \omega(2-0) = 2\omega$, $\omega_{40} = 4\omega$

a) Mit der Formel für konstante Störung laut Skriptum:

$$P_{f\leftarrow 0} = |\langle f | x^4 | 0 \rangle|^2 f_0^2 \frac{\sin^2 \omega_{f0} t/2}{(\hbar \omega_{f0}/2)^2}$$

$$P_{2\leftarrow 0} = \frac{9}{2}\left(\frac{\hbar^2}{(m\omega)^2} f_0\right)^2 \frac{\sin^2 \omega t}{(\hbar\omega)^2}$$

$$P_{4\leftarrow 0} = \frac{3}{2}\left(\qquad\right)^2 \frac{\sin^2 2\omega t}{(2\hbar\omega)^2}$$

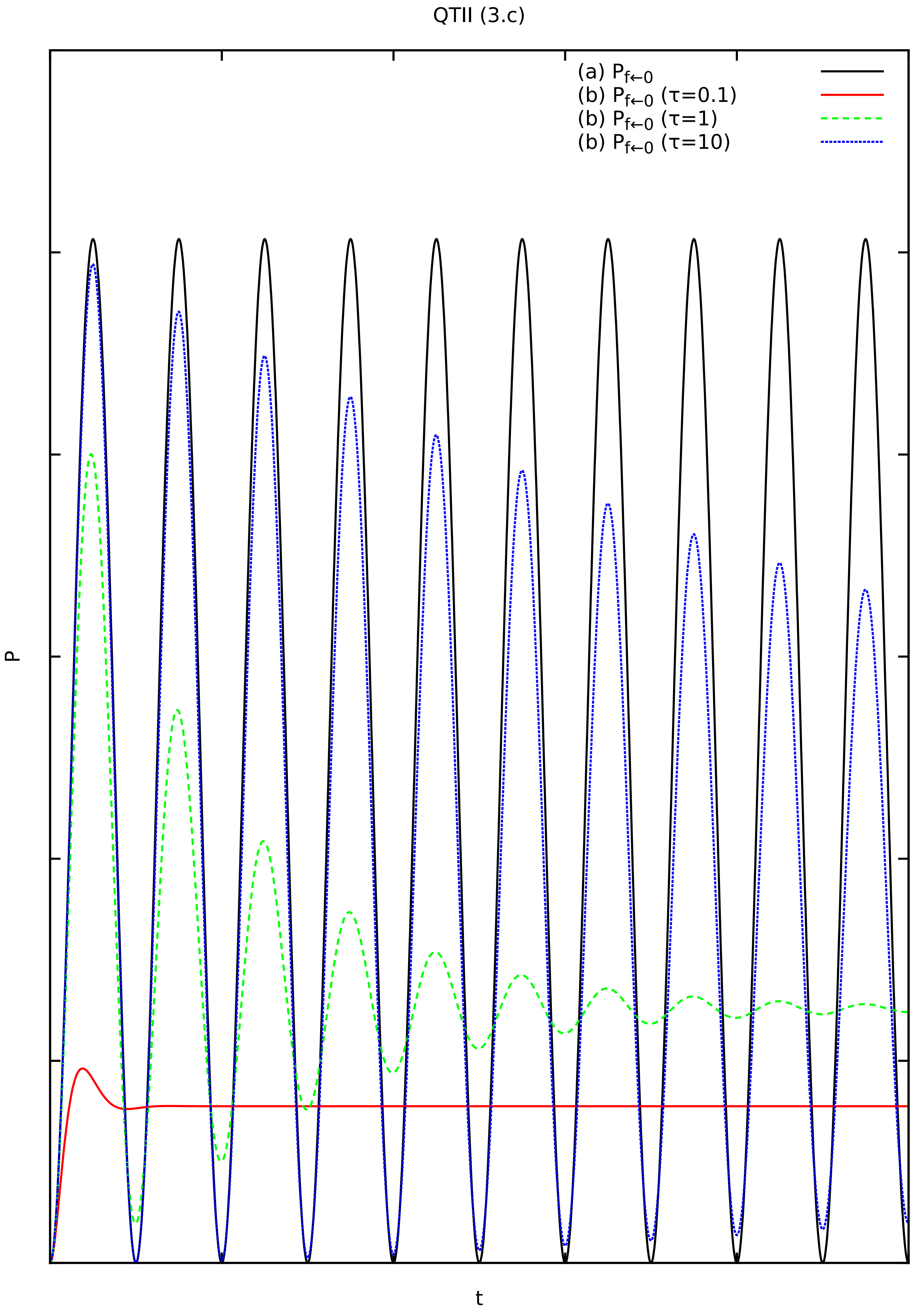
b) Die Amplitude ist $-\frac{i}{\hbar} f_0 \langle f | x^4 | 0 \rangle \int_0^t dt'\, e^{-t'/\tau + i\omega_{f0} t'}$;
das Integral ergibt $\int = \frac{e^{i\omega_{f0} t} e^{-t/\tau} - 1}{i\omega_{f0} - 1/\tau}$

und

$$|\textstyle\int|^2 = \int \int^* = \frac{e^{-2t/\tau} + 1 - 2\cos(\omega_{f0} t)\, e^{-t/\tau}}{\omega_{f0}^2 + 1/\tau^2}.$$

Schließlich für die Wahrscheinlichkeit:

$$P_{f\leftarrow 0}(t) = \frac{|V_{f0}|^2}{\hbar^2(\omega_{f0}^2 + 1/\tau^2)} \left(e^{-2t/\tau} + 1 - 2\cos(\omega_{f0} t)\, e^{-t/\tau}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{|V_{f0}|^2}{\hbar^2(\omega_{f0}^2 + 1/\tau^2)}$$



QTII (3.c)
(a) $P_{f\leftarrow 0}$
(b) $P_{f\leftarrow 0}$ (τ=0.1)
(b) $P_{f\leftarrow 0}$ (τ=1)
(b) $P_{f\leftarrow 0}$ (τ=10)
P
t

4. a) (i) Die Einschaltzeit soll kurz sein, $T \ll \hbar/\Delta E$, oder
$(T \sim 1/\omega)$: $\omega \gg g_s \mu_B B$

(ii) Lange Einschaltzeit, $\omega \ll g_s \mu_B B$

(iii) $B_x \ll B_z$ für Gültigkeit Störungstheorie 1. Ord.

b) $V_{fi} = -\underset{g_s \mu_B \hbar/2}{\underset{\uparrow}{C}} B_x \langle\downarrow|\hat{\sigma}_x|\uparrow\rangle = -CB_x$ weil $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\omega_{fi} = 2CB_z/\hbar$

$$a_{fi} = -\frac{1}{2i}\frac{i}{\hbar} V_{fi} \int_0^t dt' \left\{ e^{i(\omega_{fi}+\omega)t'} - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'} \right\}$$

$$= -\frac{V_{fi}}{\cancel{i}\hbar} e^{i\omega_{fi} t/2} \cancel{i} \left[e^{i\omega t/2} \frac{\sin\frac{\omega_{fi}+\omega}{2}t}{\omega_{fi}+\omega} - e^{-i\omega t/2} \frac{\sin\frac{\omega_{fi}-\omega}{2}t}{\omega_{fi}-\omega} \right]$$

$$\rightsquigarrow P_{fi} = |a_{fi}|^2 = \frac{C^2 B_x^2}{\hbar^2} \left[\frac{\sin^2\frac{\omega_{fi}+\omega}{2}t}{\omega_{fi}+\omega} + \frac{\sin^2\frac{\omega_{fi}-\omega}{2}t}{\omega_{fi}-\omega} - 2\cos\omega t \frac{\sin\frac{\omega_{fi}+\omega}{2}t \sin\frac{\omega_{fi}-\omega}{2}t}{\omega_{fi}^2-\omega^2} \right]$$

c) Formalismus d. Sudden Approximation im Skriptum:

$\tilde{H}_0 = -CB_z\hat{\sigma}_z$; $\hat{=} -CB_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$H_0 = -CB_z(\hat{\sigma}_z + 3/4\,\hat{\sigma}_x)$ $\hat{=} -CB_z \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 3/4 & -1 \end{pmatrix}$

Da H_0 ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld $|B| = \sqrt{1+9/16}\,B_z = 5/4\,B_z$ beschreibt, sind die Eigenenergien $\mp 5/8\,CB_z$.
Für die Eigenzustände findet man $|+B\rangle \hat{=} \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|-B\rangle \hat{=} \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow |+z\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|+B\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|-B\rangle$ mit der Zeitentwicklung

$$|+z(t>0)\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}} e^{+i/\hbar \frac{5}{8}CB_z t}|+B\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-i/\hbar \frac{5}{8}CB_z t}|-B\rangle \hat{=} \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 3e^{+\cdot} + \frac{1}{3}e^{-\cdot} \\ e^{+\cdot} - e^{-\cdot} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_\downarrow(t) = \left|\frac{3}{10}(e^{+\cdot} - e^{-\cdot})\right|^2 = 36\% \sin^2\left(\frac{5}{8}CB_z t/\hbar\right)$$

$$P_\uparrow(t) = 64\% + 36\% \cos^2\left(\frac{5}{8}CB_z t/\hbar\right)$$