Plenum

a) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(\vec{\alpha}\, c\, \vec{p} + \beta \cdot m c^2\right) \psi(\vec{x}, t)$

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(c\hbar \frac{1}{i} \vec{\alpha} \vec{\nabla} + \beta \cdot m c^2\right) \psi(\vec{x}, t)$

Ansatz für stationäre Lösung: $\psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{x})$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(c\hbar \frac{1}{i} \vec{\alpha} \vec{\nabla} + \beta m c^2\right)}_{\text{da } [H_0, \vec{p}] = 0} \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}} \underbrace{\psi}_{\text{4-er Spinor}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(c\, \vec{p} \cdot \vec{\alpha} + \beta m c^2\right) \psi = E \psi}$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit: direkte Lösung

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma^i p_i = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp_z & c(p_x - ip_y) \\ 0 & mc^2 & c(p_x + ip_y) & -cp_z \\ cp_z & c(p_x - ip_y) & -mc^2 & 0 \\ c(p_x + ip_y) & -cp_z & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung der Säkulargleichung für 4×4-Matrix.

$\Rightarrow$ möglich aber sehr rechenauf~~wand~~wendig!

2.) Möglichkeit:

$\Rightarrow$ Man benutzt die Eigenschaften der Paulimatrizen.

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\,\varepsilon^{ij}{}_k\,\sigma^k \quad \text{und} \quad \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\,\delta^{ij}\,\underset{\substack{\parallel \\ \text{Einheitsmatrix} \\ \text{im 2d Spinraum.}}}{\mathbb{1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^i \cdot \sigma^j = \tfrac{1}{2}\{\sigma^i, \sigma^j\} + \tfrac{1}{2}[\sigma^i, \sigma^j]$$
$$= \delta^{ij}\,\mathbb{1} + i\,\varepsilon^{ij}{}_k\,\sigma^k$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = (p_i\,\sigma^i)(p_j\,\sigma^j) = p_i\,p_j\,\sigma^i\sigma^j$$
$$= p_i\,p_j\,[\delta^{ij}\,\mathbb{1} + i\,\varepsilon^{ij}{}_k\,\sigma^k]$$
$$= \underbrace{p_i\,p_j\,\delta^{ij}}_{|\vec{p}|^2 = p^2}\,\mathbb{1} + i\,\underbrace{p_i\,p_j\,\varepsilon^{ij}{}_k\,\sigma^k}_{0 \text{ da } (\vec{p}\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\vec{p}\,\vec{\sigma})^2 = p^2\cdot\mathbb{1}_{(2\times2)}}$$

Im folgenden: $\varphi, \chi \in \mathbb{C}^2$ ... Zweierspinoren.

$\Rightarrow$ Dirac-Gleichung für die 2-er Spinoren:

$$\boxed{\psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} c\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi + mc^2\varphi &= E\varphi \\ c\,(\vec{\sigma}\,\vec{p})\,\varphi - mc^2\chi &= E\chi \end{aligned}}\ \boxed{\begin{matrix}(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II})\end{matrix}}$$

Berechnung der Energieeigenwerte E

Aus II folgt: $\chi = \frac{c}{E+mc^2}(\vec{p}\,\vec{\sigma})\,\varphi \Rightarrow$ in I einsetzen

$$\frac{c^2}{E+mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2\,\varphi + mc^2\varphi = E\varphi$$

$$\frac{c^2}{E+mc^2}\,p^2\,\varphi = (E - mc^2)\,\varphi$$

$$(cp)^2\ \varphi = (E-mc^2)(E+mc^2)\,\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathbb{C}^2$$

$$\Rightarrow (E-mc^2)(E+mc^2) = (cp)^2$$

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \pm\sqrt{c^2p^2+m^2c^4} = \pm E_p}$$

$(E_p > 0$ gilt immer$)$

(b) Berechnung der Eigenvektoren (Spinoren):

~~für $E = E_p = +\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$~~

$$\text{I:} \quad c\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi = (E-mc^2)\,\varphi \qquad \Big|\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})\frac{1}{cp^2}$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{E-mc^2}{cp^2}(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi$$

$$\text{II:} \quad c\,(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi = \frac{(E+mc^2)(E-mc^2)}{cp^2}(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\cdot\varphi\underbrace{\Big(1-\underbrace{\frac{(E+mc^2)(E-mc^2)}{c^2p^2}}_{1}\Big)}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \text{w. A.}$$

d.h.: allgemein lässt sich der Eigenspinor zum Eigenwert $E = \pm E_p$ schreiben

$$\Psi = N\begin{pmatrix}\varphi \\ \frac{E-mc^2}{cp^2}(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi\end{pmatrix}$$

für einen beliebigen normierten 2er Spinor $\varphi \in \mathbb{C}^2$

~~Norm~~

Normierung: $$\Psi^\dagger\Psi = |N|^2\cdot\Big(\varphi^+,\ \frac{E-mc^2}{cp^2}\,\varphi^+(\vec{\sigma}\vec{p})^+\Big)\cdot\begin{pmatrix}\varphi \\ \frac{E-mc^2}{cp^2}(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi\end{pmatrix}$$

$$= 1 = |N|^2\Big[\underbrace{\varphi^+\varphi}_{1} + \frac{(E-mc^2)^2}{c^2p^4}\,\varphi^+(\vec{\sigma}\vec{p})^2\,\varphi\Big]$$

beachte $(\vec{\sigma}\vec{p})^+ = (\vec{\sigma}\vec{p})$
$((\vec{\sigma}\vec{p})$ ist Hermitesch$)$

$$= |N|^2 \left[1 + \left(\frac{E - mc^2}{cp}\right)^2 \right] = |N|^2 \left[\frac{2E\,(E-mc^2)}{c^2p^2} \right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad |N| = \sqrt{\frac{c^2p^2}{2E\,(E-mc^2)}} = \sqrt{\frac{c^2p^2}{2E\,(E-mc^2)} \cdot \frac{E+mc^2}{E+mc^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\sqrt{1+\frac{mc^2}{E}} \quad , \; E = \pm E_p = \pm\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$$

weil $(E-mc^2)(E+mc^2) = c^2p^2$

$$\boxed{\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1+\frac{mc^2}{E}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E-mc^2}{cp^2}(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad E = \pm E_p = \pm\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}$$

kann man noch umschreiben: $\frac{c}{E+mc^2}$

Spezifizieren auf positive und negative Energielösungen:

- $E = +E_p = +\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$

$$\boxed{u_{1,2}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{1,2} \\ \frac{c\,(\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}+mc^2}\,\varphi_{1,2} \end{pmatrix}}$$

wobei $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ eine Orthonormalbasis des Spinraumes $\mathbb{C}^2$ ist.

- $E = -E_p = -\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$

$$v_{1,2}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{mc^2}{\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{1,2} \\ -\frac{c\,(\vec{\sigma}\vec{p})}{\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}-mc^2}\,\tilde{\chi}_{1,2} \end{pmatrix}$$

wobei $\{\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2\}$ eine ONB von $\mathbb{C}^2$ ist.

Diese Lösung möchte ich noch so umschreiben, daß der Normierungsvorfaktor derselbe wie für die positiven Energielösungen ist.

⊝ $N = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{mc^2}{E_p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\sqrt{\frac{1-\frac{mc^2}{E_p}}{1+\frac{mc^2}{E_p}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\cdot\sqrt{\frac{E_p-mc^2}{E_p+mc^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\cdot\sqrt{\frac{E_p-mc^2}{E_p+mc^2}} = \begin{cases}\frac{cp}{E_p+mc^2}\\ \frac{E_p-mc^2}{cp}\end{cases}$ ⇒ beide Umformungen sind möglich

⊝ $\tilde{\chi}_{1,2} = -\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}\chi_{1,2}$ wobei $\chi_{1,2}$ auch eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^2$ ist.

$$v_{1,2}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\begin{pmatrix}-\frac{cp}{E_p+mc^2}\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{p}\chi_{1,2}\\ +\frac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{\cancel{E_p-mc^2}}\frac{\cancel{E_p-mc^2}}{\cancel{cp}}\frac{1}{p}(\vec{\sigma}\vec{p})\chi_{1,2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{v_{1,2}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{mc^2+\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}\chi_{1,2}\\ \chi_{1,2}\end{pmatrix}}$$

(b) Spezialisierung auf $\vec{p} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$u_{1,2}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix}\varphi_{1,2}\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$ z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ u. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$v_{1,2}(\vec{p}=0) \quad \begin{pmatrix}0\\ \chi_{1,2}\end{pmatrix} \Rightarrow$ z.B.: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ u. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

⇒ wie im Skriptum!

(c)

$$\left.\begin{cases} c\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})\,\chi + mc^2\,\varphi = E\varphi \\ c\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi - mc^2\,\chi = E\chi \end{cases}\right\}\ \pm$$

$$\begin{cases} c\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})(\varphi+\chi) + mc^2(\varphi-\chi) = E(\varphi+\chi) \\ -c\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})(\varphi-\chi) + mc^2(\varphi+\chi) = E(\varphi-\chi) \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi+\chi = \psi_+ \quad \text{u.} \quad \varphi-\chi=\psi_-}$$

$$\begin{cases} c\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})\,\psi_+ + mc^2\,\psi_- = E\psi_+ \\ -c\cdot(\vec{\sigma}\vec{p})\,\psi_- + mc^2\,\psi_+ = E\psi_- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ für $\boxed{m=0}$ (masseloses Teilchen) entkoppeln die beiden Gleichungen u. man erhält 2 separate Gleichungen für ψ_+ u. ψ_-

$\Rightarrow$ Weyl - Gleichung (chirale Darstellung)

$$c\,(\vec{\sigma}\vec{p})\,\psi_+ = E\,\psi_+ \quad \text{... rechtschirales}$$
$$-c\,(\vec{\sigma}\vec{p})\,\psi_- = E\,\psi_- \quad \text{... linkschirales}$$
Teilchen

Lösung <u>jeder der beiden</u> Weyl-Gleichungen liefert auch wieder die relativistische Energie - Impuls - Beziehung $\quad E = \pm E_p = \pm\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$