Musterlösung 1. Test (Gruppe B in Rot)

A1 bzw. B3

a) $\mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \neq 1 \Rightarrow$ kein Dichte-Op.

$\mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix} = 1$; $\mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1/4 & \\ & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \neq \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Dichte-Op. aber kein reiner Zustand

$\mathrm{Spur}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $\quad$ $\mathrm{Spur}\ \frac{1}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Spur}\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow$ Dichte Op reiner Zustand

b) $\sigma_y = \begin{pmatrix} & -i \\ +i & \end{pmatrix} \Rightarrow |\uparrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix}$ bleibt bei Drehung in y-Richtung invariant da $\sim \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ Wahrsch. $|\uparrow_y\rangle$ zu messen ist $1/2$

$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ist Dichtematrix von $|\uparrow\rangle_x$

(alternativ: $\mathrm{Spur}\ |\uparrow\rangle_x\langle\uparrow|_x \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ bilden) $\Rightarrow$ Wahrsch. $|\uparrow_y\rangle$ zu messen ist $1/2$

Dichtematrix nach der Messung in beiden Fällen

$$\rho = |\uparrow_y\rangle\langle\uparrow|_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1\ \ -i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\hat{\rho}_1 = \sum_m \alpha_{mn}\alpha_{mn'}\ |n\rangle_1\langle n'|_1$ hier $|\Psi\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\alpha_{\downarrow\uparrow}}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\alpha_{\uparrow\downarrow}}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$

$\begin{array}{ll} & \alpha_{\downarrow\uparrow} \quad \alpha_{\uparrow\downarrow} \\ & mn \quad\ \ mn \end{array}$

$= |\alpha_{\downarrow\uparrow}|^2\ |\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + |\alpha_{\uparrow\downarrow}|^2\ |\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|$

$= \frac{1}{2}|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|$ bzw $\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\left[|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - i |\downarrow\rangle_1 |\downarrow_2\rangle \right] / \sqrt{2} = \frac{|\uparrow\rangle_1 - i|\downarrow\rangle_1}{\sqrt{2}} \quad |\downarrow\rangle_2$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{|\uparrow\rangle_1 - i|\downarrow\rangle_1}{\sqrt{2}} \quad \frac{{}_1\langle\uparrow| + i\, {}_1\langle\downarrow|}{\sqrt{2}}$$

bzw. $\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

d) bzw e) große τ $\Rightarrow$ adiabatische Näherung

$E(\tau) = 0$ $\Rightarrow$ Teilchen wieder im Grundzustand

e) bzw d) kleiner Energiebeitrag der Störung $\Rightarrow$ Störungstheorie

$t \to \infty$ $\Rightarrow$ Fermi's Goldene Regel anwendbar

Übergangsrate:

$$W_{f\leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \underbrace{\delta\left(\frac{E_f - E_i}{\hbar}\right)}_{\text{Energieerhaltung}} \cdot \langle \underbrace{\psi_f}| -|e|(-E_0 \cdot z) |\underbrace{\psi_i}_{\sim y/r}\rangle$$

Energieerhaltung $\Rightarrow n = 2$

$\sim y/r$ bzw $\sim x/r$

$\ell = 0: Y_0^0$

$\ell = 1 \; Y_1^0 \sim z/r$

$\ell = 1: (-Y_1^1 + Y_1^{-1}) \sim \frac{x}{r}$ bzw $\sim \frac{y}{r}$

Verschwindet wegen Parität bzw. wegen Dipolregeln für alle $|\psi_f\rangle \neq |\psi_i\rangle$ und $n = 2$

$\Rightarrow$ Mit 100% Wahrsch. in $R_{21}(Y_1^1 + Y_1^{-1})/\sqrt{2}$

bzw $R_{21}(Y_1^1 - Y_1^{-1})\sqrt{2}$

Gruppe A: α, β Gruppe B: a, b

3. Richtiges Variationsverfahren, 2. obere Schranke für GSE

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - \alpha\delta(x) = T + V$$

$$\psi(x) = A e^{-\beta x^2}$$

a) $$\langle\psi|\psi\rangle = |A|^2\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$$

$$\langle\psi|T|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, A^* e^{-\beta x^2}\partial_x^2\left(A e^{-\beta x^2}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) =$$

$$= -\frac{\hbar^2|A|^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta x^2}\partial_x\left(-\beta 2x\, e^{-\beta x^2}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2|A|^2\beta}{m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta x^2}\left(e^{-\beta x^2} - 2\beta x^2 e^{-\beta x^2}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2|A|^2\beta}{m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[e^{-2\beta x^2} - 2\beta x^2 e^{-2\beta x^2}\right] = \Big|\ \text{Hinweise}\ \Big| =$$

$$= \frac{\hbar^2|A|^2\beta}{m}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} + \frac{\cancel{2}\beta}{+\cancel{2}}\partial_\beta\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2|A|^2\beta}{m}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{-2}\frac{1}{b^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2|A|^2}{m}\left[\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}}\right] = \underline{\frac{\hbar^2|A|^2}{2m}\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}}}$$

$$\langle\psi|V|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, A^* e^{-\beta x^2}(-\alpha)\delta(x)\, A e^{-\beta x^2} = \underline{\underline{-\alpha|A|^2}}$$

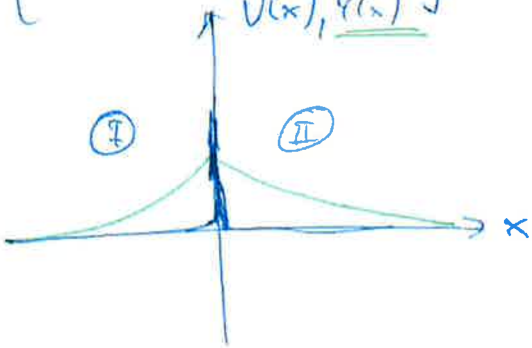
$$\Rightarrow \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\hbar^2\beta}{2m} - \alpha\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}$$

$$\partial_\beta(\ldots) = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\beta}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{2m^2\alpha^2}{\pi\hbar^4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{RV} = -\frac{m\alpha^2}{\pi\hbar^2}}$$

b) exakte Lösung: Schrödinger-Gleichung für Delta-Potential

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - \alpha\delta(x)\right]\psi = E\psi$$



RB: (·) Wellenfunktion stetig an $x=0$

(·) erste Ableitung macht Sprung mit $\psi'_{II} - \psi'_{I}\big|_{x\to 0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$

Ansatz: $\psi_I(x) = A_1 e^{-k_1 x} + B_1 e^{k_1 x}$

$\psi_{II}(x) = A_2 e^{-k_2 x} + A_2 e^{k_2 x}$

Energieerhaltung: $k_1 = k_2 = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Normierbarkeit: $A_2 = 0 = A_1$

Normierung: $B_1 = B_2$ (aus RB)

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} Be^{kx}, & x \le 0 \\ Be^{-kx}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Einsetzen der RB für erste Ableitung: $\psi'_{II} - \psi'_{I}\big|_{x\to 0} = -2Bk = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}B$

$\psi(0) = B$

$$\Rightarrow k = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} < E_{R.V.}}$$

QM II 1. Test (WS 2012/2013)

Musterlösung (Gruppe A) 2. Beispiel: Musterlösung (Gruppe B) 4. Beispiel:

τ $\quad$ t_0

(a) Elektrisches Feld $E(t) = E_0\, e^{-\frac{t}{\tau (t_0)}}$

$\Rightarrow$ Potential: $\phi(x,t) = -E_0\, e^{-\frac{t}{\tau(t_0)}} x$

$\Rightarrow$ Potentielle Energie der Ladung q: $V(x,t) = -qE_0 x\, e^{-\frac{t}{\tau(t_0)}}$

$$H(t) = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2}_{H_0} \underbrace{- qE_0 x\, e^{-\frac{t}{\tau(t_0)}}}_{H_I}$$

$$= H_0 + H_I$$

(b) $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+)$

$\Rightarrow$ mit einem linearen Störterm in x ist ein Übergang nur in den 1. angeregten Zustand möglich.

$\Rightarrow$ Die Übergangsamplitude $c_{10}^{(1)}(T)$ lautet in 1. Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie:

$$c_{10}^{(1)}(T) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^T dt\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t} \langle 1|V(t)|0\rangle$$

$\ominus$ $E_1 - E_0 = \hbar\omega$

$\ominus$ $\langle 1|V(t)|0\rangle = -qE_0\, e^{-\frac{t}{\tau(t_0)}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\underbrace{\langle 1|a|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^+|0\rangle}_{1}\right]$

$$= -qE_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, e^{-\frac{t}{\tau(t_0)}}$$

$$\Rightarrow \quad c_{10}^{(1)}(T) = -\frac{1}{i\hbar}\, q E_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^T dt\, e^{i\omega t}\, e^{-\frac{t}{\tau(\lambda_0)}}$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\, q E_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \frac{1}{i\omega - \frac{1}{\tau(\lambda_0)}}\left[e^{\left(i\omega - \frac{1}{\tau(\lambda_0)}\right)T} - 1 \right]$$

$$P_{0\to1}(T) = |c_{10}^{(1)}(T)|^2 = \frac{q^2 E_0^2}{2m\omega\hbar}\, \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}} \left(\sqrt{\left(e^{-\frac{T}{\tau(\lambda_0)}}\cos(\omega T) - 1\right)^2 + e^{-\frac{2T}{\tau}} \sin^2(\omega T)} \right)^2$$

$$= \frac{q^2 E_0^2}{2m\omega\hbar}\, \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}} \left(1 - 2 e^{-\frac{T}{\tau(\lambda_0)}} \cos(\omega T) + e^{-\frac{T\cdot 2}{\tau(\lambda_0)}} \right)$$

$$= \frac{q^2 E_0^2}{\cancel{2} m\omega\hbar}\, \frac{\cancel{2}\, e^{-\frac{T}{\tau}}}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}} \left(\cosh\left(\frac{T}{\tau(\lambda_0)}\right) - \cos(\omega T) \right)$$

$$\boxed{P_{0\to1}(T) = \frac{q^2 E_0^2}{m\hbar\omega}\, \frac{e^{-\frac{T}{\tau(\lambda_0)}}}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}} \left[\cosh\left(\frac{T}{\tau(\lambda_0)}\right) - \cos(\omega T) \right]}$$

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} P_{0\to1}(T) = \frac{q^2 E_0^2}{2m\hbar\omega}\, \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}}}$$

Wegen $\langle n | a + a^\dagger | 0 \rangle = 0$ für $n \neq 1$

$\Rightarrow \quad P_{0\to n} \equiv 0 \quad \forall\, n > 1$

(c) Beschränkung auf 1. Ordnung Störungstheorie ist gut wenn $P_{0\to1} \ll 1$.

$$\Rightarrow \quad \frac{q^2}{2m\hbar\omega} E_0^2 \ll \omega^2 + \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{q^2}{2m\hbar\omega} E_0^2 \ll \frac{1}{\tau^2(\lambda_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, q E_0 \ll \frac{1}{\tau(\lambda_0)}$$

MUSTERLÖSUNG 4. BEISPIEL "S-Wellen Streuung" / FÜR TEST B 1. BEISPIEL "Partialwellen"

$\alpha \to a$

$\beta \to b$

a) Streupotential : $V(r) = \alpha e^{-\beta r}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Reichweit des Potentials} : 1/\beta \\ \text{Intensität} : \alpha \end{cases}$

- Für die s-Welle Nährung (d.h. $l=\emptyset$) mussen alle Beiträge mit höheren l ($l \geq 1$) vernachlässigbar sein : $K \frac{1}{\beta} \ll 1$
- Für die erste Bornsche Nährung : für ein bestimmtes K mussen α und $1/\beta$ klein genug(*) sein.

b) $$f_{Born, l=0}(\theta,\phi) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\, r^2 \alpha e^{-\beta r} j_0^2(kr) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 k^2}\int_0^{+\infty} dr\, e^{-\beta r} \sin^2(kr)$$

$$\sin(kr) = \left(\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2i}\right)$$

$$= \frac{m\alpha}{\hbar^2 2k^2}\int_0^{+\infty} dr\, e^{-\beta r}\left(e^{2ikr}+e^{-2ikr}-2\right) = \dots = \dots$$

$$= -\frac{4m\alpha}{\hbar^2\beta(\beta^2+4k^2)} \Rightarrow \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{B,l=0} = |f_{B,l=0}(\theta,\phi)| = \frac{16\, m^2\alpha^2}{\hbar^4\beta^2(\beta^2+4k^2)^2}$$

c) Da der s-Welle differenzielle Streuquerschnitt unabhängig von θ und ϕ ist, ist die Integration über den Raum Winckel trivial und liefert :

$$\sigma_{TOT} = (4\pi)\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{64\pi\, m^2\alpha^2}{\hbar^4\beta^2(\beta^2+4k^2)}$$

(*) ÜBER DAS TEST NIVEAU HINAUSGEHEND :

Mit den Ergebnissen des 2. Plenums könnte man auch eine genauere Beolingung abschätzen :

$$\frac{\hbar^2}{2m r_0^2 V_0} = \frac{\hbar^2\beta^2}{2m\alpha} \gg \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{4k^2/\beta^2}_{\ll 1 \text{ für die s-Welle}}}} \Rightarrow \frac{\hbar^2\beta^2}{2m\alpha} \gg 1$$