Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

2. Plenum zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

<u>PLENUM</u>: Dienstag, 06.11.2012.

Bornsche Näherung

Die Bornschen Näherung ist anwendbar, wenn der V-lineare Term der Bornschen Reihe klein gegenüber der ungestörten ebenen Welle ist. Mathematisch bedeutet das

$$\left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r'\,\frac{\mathrm{e}^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,V(\vec{r'})\,\varphi_k(\vec{r'})\right| \ll |\varphi_k(\vec{r'})| \;\text{ mit }\; \varphi_k(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Speziell für ein zentralsymmetrisches Potential, $V(\vec{r'}) = V(r')$, das seinen größten Wert bei $r = 0$ annimmt, fordern wir

$$\left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\,\mathrm{e}^{i(kr+\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\frac{V(\vec{r})}{r}\right| \ll 1.$$

a) Führen Sie in der letzten Ungleichung die Winkelintegration aus und berechnen Sie den verbleibenden Ausdruck für

$$V(r) = V_0\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}.$$

Die Konstanten V_0 und $r_0 > 0$ bezeichnen die Stärke und die Reichweite des Streupotentials.

b) Berechnen Sie für das in a) gegebene Potential den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung.

Über die Lippmann-Schwinger Gleichung

• *Nebenrechnungen, die nicht im Plenum besprochen werden*

*) Zeigen Sie, dass die Lippmann-Schwinger Gleichung in Dirac Notation

$$|\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^{\pm}(k) \cdot U \cdot |\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle$$

auf die in der Vorlesung behandelte Lippmann-Schwinger Gleichung in Ortsraum-Darstellung

$$\psi^{\pm}(\vec{r}, \vec{k}) = \Phi(\vec{r}, \vec{k}) - \frac{\mathrm{e}^{\pm ik \cdot r}}{4\pi r} \int d^3r' \mathrm{e}^{\mp i\vec{k'} \cdot \vec{r'}} U(\vec{r'}) \psi^{\pm}(\vec{r'}, \vec{k}) \;\; \text{mit } \vec{k'} = k \cdot \hat{r}$$

führt.

*) Die Schrödinger Gleichung $(\nabla^2 + k^2)u(\vec{x}) = U(\vec{x})u(\vec{x})$ kann mit der Greenfunktion-Methode gelöst werden. Die Greenfunktion $G_0(k, \vec{R})$ ist definiert als

$$(\nabla^2 + k^2) G_0(k, \vec{R}) = \delta(\vec{R}),$$

wobei $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x'}$. Führen Sie die Fourier-Transformation der Definitionsgleichung für $G_0(k, \vec{R})$ (d.h., $G_0(k, \vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{i\vec{K}\vec{R}} \tilde{G}_0(k, \vec{K}) d^3K$ durch, wobei $\tilde{G}_0(k, \vec{K})$ die Fourier Transformation der Green Funktion ist). Berechnen Sie danach den expliziten Ausdruck für $G_0(k, \vec{R})$ aus der fouriertransformierten Gleichung.

Hinweis: Die Integrale über dK können am besten mit der Cauchy Integralformel berechnet werden. Beachten Sie, dass die Fouriertransformierte $\tilde{G}_0(k, \vec{K})$ Pole auf der reellen Achse hat. Deswegen muss man die Pole mit $\pm i\epsilon$ verschieben. Das impliziert die Existenz zweier verschiedener Lösungen, nämlich die retardierte $(+i\epsilon)$ und die avancierte $(-i\epsilon)$ Greenfunktion.