QM II 2012 WS 4. Übung – Musterlösung

Hinweis zu Strom- u. Ladungsdichte in der Dirac-Gleichung:

- **Ladungsdichte**: $\rho(\vec{r},t) = e \cdot \psi^\dagger(\vec{r},t) \cdot \psi(\vec{r},t)$

$\Rightarrow$ Die Stromdichte kann nun durch die Kontinuitätsglg. abgeleitet werden: $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},\vec{t}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},\vec{t})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = e\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t) + e\,\psi^\dagger(\vec{r},t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)\right)$$

Dirac-Glg.: $\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{i\hbar}\left(c\cdot\vec{\alpha}\,\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi(\vec{r},t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\vec{r},t) = \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{c\hbar}{i}\left(\vec{\nabla}\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)\right)^\dagger - \beta mc^2\psi(\vec{r},t)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -e\cdot c\cdot\left(\psi^\dagger(\vec{r},t)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{r},t) + (\vec{\nabla}\psi^\dagger(\vec{r},t))\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\Big[\underbrace{e\cdot c\;\psi^\dagger(\vec{r},t)\,\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)}_{\vec{j}(\vec{r},t)}\Big]$$

$$\boxed{j(\vec{r},t) = e\cdot c\cdot\psi^\dagger(\vec{r},t)\,\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)}$$

(7.) a) $$\psi_I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\cdot\left[A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{cp}{mc^2+E_p}\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}px} + B'\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{-cp}{mc^2+E_p}\\0\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}px} + B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{-cp}{mc^2+E_p}\end{pmatrix}\right]$$

wobei $\boxed{E_p = \sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}$

(8)

1) $E_p \geq V + mc^2$

$$\psi_{II}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\left[C' e^{\frac{i}{\hbar}qx}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{cq}{mc^2+E_q}\\0\end{pmatrix} + C e^{\frac{i}{\hbar}qx}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{cq}{mc^2+E_q}\end{pmatrix}\right]$$

$$E_q = \sqrt{c^2q^2+m^2c^4} \qquad E_q = E_p - V > mc^2$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{(E_p-V)^2}{c^2} - m^2c^2}$$

Stetigkeitsbedingung an der Schwelle: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

- $B' = C' = 0 \Rightarrow$ Der Spin bleibt erhalten!
- $\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,(A+B) = \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\,C$

  $\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,\frac{cp}{mc^2+E_p}(A-B) = \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\,\frac{cq}{mc^2+E_q}\cdot C$

  A dient nur zur Normierung der Gesamtwellenfkt $\Rightarrow$ interessant sind $\frac{B}{A}$ u. $\frac{C}{A}$

Dividieren der beiden Glg. liefert:

$$\frac{A-B}{A+B} = \frac{1-\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}} = \boxed{\frac{mc^2+E_p}{mc^2+E_q}\cdot\frac{q}{p} =: \rho}$$

$\Downarrow$ Extremfälle für ρ

- $E_p = V + mc^2 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow \rho = 0$
- $E_p \to \infty$ (d.h. $E_p \gg V$)

  $p \simeq q$ u. $E_p \simeq E_q \Rightarrow \rho = 1$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq \rho \leq 1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Aus der ersten Gleichung kann man nun $\frac{C}{A}$ berechnen:

$$1+\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{1+\frac{mc^2}{E_q}}{1+\frac{mc^2}{E_p}}}\;\frac{C}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{mc^2+E_q}{mc^2+E_p}}\cdot\sqrt{\frac{E_p}{E_q}}\;\frac{C}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{mc^2+E_q}{mc^2+E_p}\,\cancel{\frac{p}{q}}}\;\sqrt{\frac{E_p\,q}{E_q\,p}}\cdot\frac{C}{A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\frac{E_p\,q}{E_q\,p}}\;\frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2}{1+\rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{E_p q}{E_q p}} \frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E_p q}{E_q p}} \cdot \frac{C}{A} = \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}$$

Berechnung von Transmissions- u. Reflexionskoeffizient:

$$T = \left| \frac{J_{Trans}}{J_{In}} \right| \qquad R = \left| \frac{J_{Refl}}{J_{In}} \right|$$

$$(e = 1) \qquad J_x(x) = c\, \psi^+(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi(x)$$

$$\Rightarrow J_x = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_p}\right)\left[A^2 \frac{cp}{mc^2+E_p} - B^2 \frac{cp}{mc^2+E_p}\right] + \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_q}\right) \frac{cq}{mc^2+E_q} C^2$$

$$= \underset{(A)}{J_{In}} + \underset{(B)}{J_{Refl}} + \underset{(C)}{J_{Trans}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} J_{In} &= \frac{c}{2}\left(1+\frac{mc^2}{E_p}\right)\frac{cp}{mc^2+E_p} A^2 \\ J_{Refl} &= \frac{c}{2}\left(1+\frac{mc^2}{E_p}\right)\frac{cp}{mc^2+E_p} B^2 \\ J_{Trans} &= \frac{c}{2}\left(1+\frac{mc^2}{E_q}\right)\frac{cq}{mc^2+E_q} C^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{R =} \left| \frac{J_{Refl}}{J_{In}} \right| = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \boxed{\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}$$

$$\boxed{T =} \left| \frac{J_{Trans}}{J_{In}} \right| = \frac{q}{E_q} \cdot \frac{E_p}{p} \left(\frac{C}{A}\right)^2 \boxed{= \frac{4\rho}{(1+\rho)^2}}$$

$$(T + R = 1 \checkmark)$$

$\rightarrow$ Da $0 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow 0 \leq R, T \leq 1$

$\rightarrow$ Extremfälle: ∘ $E_p = V + mc^2 \Rightarrow \rho = 0$, $R = 1$, $T = 0$

∘ $E_p \to \infty$ $(E_p \gg V)$ $\rho = 1$, $R = 0$, $T = 1$

2) $V + mc^2 > E_p > V$

Die Rechnung geht genauso wie für $E_p > V + mc^2$, der einzige Unterschied ist nun, dass q imaginär wird:

$$q = \overset{+}{(-)} i \sqrt{\underbrace{m^2c^2 - \left(\frac{E_p - V}{c}\right)^2}_{>0}}$$

($+$ Vorzeichen, da $e^{i/\hbar\, qx}$ für $x>0$ exponentiell gedämpft werden soll)

Da q nun imaginär ist wird auch ρ imaginär

$\Rightarrow \quad \rho \to i\bar{\rho}$ mit reellem $\bar{\rho}$

$\Rightarrow \quad \boxed{R = \left|\frac{1 - i\bar{\rho}}{1 + i\bar{\rho}}\right|^2 = 1} \quad \forall\, \bar{\rho} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Das Elektron wird vollständig an der Barriere reflektiert.

(T macht hier keinen Sinn mehr, da es innerhalb der Barriere, d. h. für $x > 0$, nur mehr eine exponentiell abfallende, aber keine propagierende Lösung mehr gibt.)

3.) $V - mc^2 > E_p$ $(> mc^2)$

Da nun $E_p - V < -mc^2 < 0$ ist muss ich für diesen Fall im Bereich II eine Lösung der freien Dirac-Gleichung mit negativer Energie ansetzen.
Da gesamt eine positive Energie von $x = -\infty$ nach $x = +\infty$ fließen soll, muss die entsprechende negative Energie von rechts nach links fließen

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{i}{\hbar} qx} \quad (q>0) \Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + qx)} = e^{+\frac{i}{\hbar}E_q t - \frac{i}{\hbar} qx}$$

$E = -E_q$

$\Downarrow$

in $+x$-Richtung
voranschreitende Welle
mit Energie $(+)E_q$

Der Ansatz für $\psi_{II}(x)$ lässt sich schreiben:

$$\psi_{II}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\left[C' e^{-\frac{i}{\hbar}qx}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cq}{mc^2+E_q} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C\, e^{-\frac{i}{\hbar}qx}\begin{pmatrix} \frac{cq}{mc^2+E_q} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ folgt:

- $C' = 0$

$$\boxed{q = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{V-E_p}{c}\right)^2}_{>m^2c^2} - m^2c^2}} \longrightarrow \boxed{q \text{ ist reell!}}$$

$$\left(E_q = +\sqrt{q^2c^2 + m^2c^4}\right)$$

- $$\left.\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,(A+B) &= \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\,\frac{cq}{mc^2+E_q}\,C \\ \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,\frac{cp}{mc^2+E_p}(A-B) &= \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\,C \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A-B}{A+B} = \frac{(mc^2+E_p)(mc^2+E_q)}{c^2\,p\,q} = \frac{1-\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{mc^2+E_p}{cp}\;\frac{mc^2+E_q}{cq}} \quad (>1)$$

- Spezialfall: $\rightarrow E_p = V - mc^2 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow \rho = \infty$

$\cancel{\rightarrow E_p \ll V - mc^2}$

$\Rightarrow \boxed{1 < \rho < \infty}$

$$\boxed{\frac{B}{A} = \frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

Für $\frac{C}{A}$ folgt aus der ersten Gleichung:

$$\left(1+\frac{B}{A}\right) = \sqrt{\frac{1}{mc^2+E_p}\cdot\frac{1}{mc^2+E_q}}\;\sqrt{\frac{E_p}{E_q}}\;cq\;\frac{C}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\rho}}\;\sqrt{\frac{qE_p}{pE_q}}\;\frac{C}{A} = 1+\frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2}{1+\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C}{A}\cdot\sqrt{\frac{qE_q}{pE_q}} = \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}}$$

Genauso wie für $E_p > V+mc^2$ ergibt sich daher für R u. T:

$$R = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 \qquad T = \frac{4\rho}{(1+\sqrt{\rho})^2}$$

Hier gilt allerdings: wenn $E_p = V-mc^2$, d. h., E_p sehr nah bei der Schwelle ist:

$$\rho = \infty \Rightarrow R = 1 \quad , T = 0$$

<u>Paradoxie:</u> Je stärker man die Energie absenkt ($E_p \ll V-mc^2$, aber $> mc^2$) desto höher wird die Transmission

$\boxed{\text{Spin}}$: Interessant ist, dass ich in diesem Fall einen $\downarrow$ - Spinor für die negative Energie nehmen muss.

(8.) (a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; |C|^2\, e^{-\frac{x^2}{D^2}} = 1 = |C|^2\, D\sqrt{\pi} \Rightarrow |C| = \sqrt{\frac{1}{D\sqrt{\pi}}}$$

(b) Entwicklung von $\psi_0(x)$:

$$\psi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\; e^{\frac{i}{\hbar}px}\left[a_1(p)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{cp}{mc^2+E_p}\end{pmatrix} + a_2(p)\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{cp}{mc^2+E_p}\\0\end{pmatrix} + b_1(p)\begin{pmatrix}-\frac{cp}{mc^2+E_p}\\0\\0\\1\end{pmatrix} + b_2(p)\begin{pmatrix}0\\-\frac{cp}{mc^2+E_p}\\1\\0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}$$

$\Rightarrow$ $a_i(p)$ u. $b_i(p)$ werden durch Projektion von ψ_0 auf die Basis bestimmt:

$$\sqrt{\frac{2E_p}{mc^2+E_p}}\, a_1(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; \psi_0^\dagger(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\cdot \underline{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{1}{D\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-\frac{x^2}{2D^2}-\frac{i}{\hbar}px}$$

$$\overset{x=\sqrt{2}Dy}{=} \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2D}{\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\; e^{-y^2-\frac{i}{\hbar}p\sqrt{2}Dy}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2D}{\sqrt{\pi}}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\; e^{-\left(y+i\frac{pD}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2}}_{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{p^2D^2}{2\hbar^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2D}{\sqrt{\pi}}}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{p^2D^2}{2\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \quad a_1(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{2D\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{p^2D^2}{2\hbar^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}$$

$a_2(p) = 0$ (wegen Spinorprojektion)

$b_1(p) = \ldots$ Rechnung wie bei $a_1(p)$ $\Rightarrow$ man erhält nur einen zusätzlichen Faktor $-\frac{cp}{mc^2+E_p}$ aus der Spinprojektion:

$$b_1(p) = -\frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{2D\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{p^2D^2}{2\hbar^2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,\frac{cp}{mc^2+E_p}$$

$b_2(p) = 0$

$$\boxed{\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{2D\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\; e^{\frac{i}{\hbar}px}\, e^{-\frac{p^2D^2}{2\hbar^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{cp}{mc^2+E_p}\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt} - \frac{cp}{mc^2+E_p}\begin{pmatrix}-\frac{cp}{mc^2+E_p}\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{+\frac{i}{\hbar}E_pt}\right]}$$

(c) $\left|\frac{b_1(p)}{a_1(p)}\right| = \frac{cp}{mc^2 + E_p}$

$\ominus$ $D \to \infty$: $e^{-\frac{(pD)^2}{2\hbar^2}}$ $\Rightarrow$ $pD \leq 1$ liefert einen Beitrag $\to$ Nur $p=0$ liefert also einen wesentlichen Beitrag

$$\Rightarrow \left|\frac{b_1(p)}{a_1(p)}\right|\Bigg|_{p=0} = 0$$

$\Rightarrow$ Negative Energielösungen tragen nicht bei wenn das Wellenpaket sehr breit ist.

$\ominus$ $D \to 0$ $e^{-\frac{p^2 D^2}{2\hbar^2}}$ liefert einen Beitrag für $p < 1/D$ u. daher auch für $p \to \infty$

$$\left|\frac{b_1(p)}{a_1(p)}\right|_{p\to\infty} = 1$$

$\Rightarrow$ Ist das Wellenpaket stark lokalisiert sind neg. Energielösungen wichtig.