Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, D.I. T. Schäfer

Nachtest zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Test B **Name:** **Matrikelnummer:**

B1	B2	B3	B4	Σ
6+2*	7	10	7	30+2*

1. Bosonische Teilchendichte

2+4+2 =6+2* Punkte*

Zwei identische bosonische Teilchen mit Spin 0 besetzen zwei Zustände, die von den normierten (aber nicht orthogonalen) Wellenfunktionen $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ bzw. $\psi_\beta(\mathbf{r})$ beschrieben sind.

a) Geben Sie die normierte Wellenfunktion der zwei Teilchen an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Dichte-Operators der zwei Teilchen, d.h. $\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem entsprechenden Resultat für zwei *nicht* identische Teilchen. Wie kann man diesen Vergleich interpretieren, z.B. in der Region, wo es einen Überlapp zwischen $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ und $\psi_\beta(\mathbf{r})$ gibt?

c) *Bonusaufgabe:* Welcher Unterschied ist für zwei *Fermionen* zu erwarten, wenn beide Teilchen Spin $S = \frac{1}{2}$ und $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ haben?

2. Bornsche Näherung eines Streuproblems

4+1+2=7 Punkte

Ein Teilchen der Masse m wird an einem (dreidimensionalen) Zentralpotential der Form

$$V(r) = \frac{b}{r^2} \tag{1}$$

gestreut.

Hinweise: • $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \pi$ • $1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

a) Berechnen Sie in *erster* Bornscher Näherung die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ des Teilchens an obigem Potential.

b) Berechnen Sie, ausgehend von **a)**, den differentiellen Wirkungsquerschnitt dieser Streuung.

c) Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt? Wie kann man dieses Ergebnis im Zusammenhang mit der Bornschen Reihe und der Form des Potentials interpretieren?

3. Theorieaufgaben

3+3.5+3.5=10 Punkte

a) Ein unpolarisierter Strahl Spin-1/2-Teilchen trifft auf einen Sterngerlachapparat, der den Spin in x Richtung misst. Geben Sie in Spin-z-Basis(!) die Dichtematrix für den Spinanteil vor und nach der Messung mit Messergebnis $S_x = \hbar/2$ an. Nach der Messung propagiert der Strahl eine Zeit Δt durch ein Magnetfeld B_x in x-Richtung. Wie lautet die Dichtematrix nach dieser Zeit Δt?

b) Welche der folgenden Operatoren kommutieren mit der Dirac-Glg. (jeweils mit Beweis, $\vec{\sigma}$ ist der Vektor der drei Paulimatrizen)?

$$\text{(a) Drehimpuls } \vec{L}^2, \quad \text{(b) Spin } \vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } \vec{S}^2 \ .$$

c) Zur Beschreibung der Supraleitung kann man die Bogoliubov-Transformation der elektronischen Erzeugungs- ($a^\dagger_{\vec{k}}$) und Vernichtungsoperatoren ($a_{\vec{k}}$) zum Wellenvektor $\vec{k} \neq \vec{0}$ verwenden:

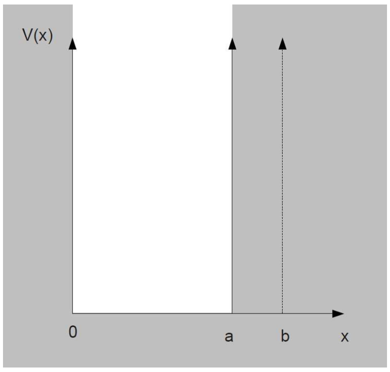
$$\begin{aligned} b^\dagger_{\vec{k}} &= u a^\dagger_{\vec{k}} - v a_{-\vec{k}} \quad , \quad b_{\vec{k}} = u^* a_{\vec{k}} - v^* a^\dagger_{-\vec{k}} \\ b_{-\vec{k}} &= v a^\dagger_{\vec{k}} + u a_{-\vec{k}} \quad , \quad b^\dagger_{-\vec{k}} = v^* a_{\vec{k}} + u^* a^\dagger_{-\vec{k}}. \end{aligned}$$

Hierbei seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $|u|^2 + |v|^2 = 1$ und $uv^* - u^*v = 0$.
Zeigen Sie, dass $b^\dagger_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}$ fermionische Operatoren sind, d.h. die entsprechenden Kommutationsrelationen erfüllen.

4. Teilchen im Kastenpotential

2+1+4=7 Punkte

Ein Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = -\infty$ im Grundzustand eines unendlich hohen, eindimensionalen Potentialwalls der Breite a (siehe untenstehende Abb.). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird dessen rechte Wand plötzlich (innerhalb eines Zeitraums Δt) zum Punkt $b > a$ verschoben.



a) Geben Sie den alten und den neuen Hamiltonoperator des obigen Systems an. Wie lauten deren Eigenfunktionen?

b) Welche Näherung können Sie anwenden, um die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in den jeweiligen Zuständen des neuen Hamiltonoperators zu finden, zu berechnen? Wann ist diese Näherung gültig (mathematischer Ausdruck)?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen in den jeweiligen Zuständen des neuen Hamiltonoperators zu finden.

Hinweise:

- $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Viel Erfolg!