Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

2. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Test A **Name:** **Matrikelnummer:**

A1	A2	A3	A4	Σ
8	8	8	6+3*	30+3*

1. Rashba-Spin-Bahn-Kopplung

5+3=8 Punkte

Ein relativistischer Quanteneffekt ist die Spin-Bahn-Kopplung. Wenn sich die Elektronen nur in einer 2-dimensionalen Ebene bewegen mit einem Potentialgradient senkrecht hierzu, führt dies zur Spin-Bahn-Kopplung nach Rashba. Zusammen mit der kinetischen Energie ergibt sich der Hamilton-Operator (σ_x, σ_y sind die Paulimatrizen):

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \alpha(p_y\sigma_x - p_x\sigma_y) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie die (nicht unbedingt normierten) Eigenfunktionen und -energien des Hamiltonoperators an. (Überlegen Sie zunächst, in welcher Basis Sie am sinnvollsten rechnen.)

b) Zeigen Sie, dass die Spinrichtung der Eigenfunktionen senkrecht zum Impuls steht, z.B. indem Sie den Erwartungswert von $\vec{p}\vec{\sigma}$ berechnen.

2. Theorieaufgaben

2+3+3=8 Punkte

a) Welche der folgenden Operatoren kommutiert mit der Klein-Gordon-Glg.,
d.h. mit $-\Box - m^2c^2/\hbar^2$?

$$O_1 : \psi(\vec{r}, t) \to \psi(\vec{r}, -t) \quad , \quad O_3 : \psi(\vec{r}, t) \to \psi^*(-\vec{r}, -t)$$
$$O_2 : \psi(\vec{r}, t) \to \psi^*(\vec{r}, -t) \quad , \quad O_4 : \psi(\vec{r}, t) \to \psi(\vec{r} + \vec{v}t, t) \text{ mit } \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

[Ohne Beweis. Jede richtige (falsche) Antwort +0.5 (-0.5) Punkte; Minimum 0 Punkte.]

b) Gegeben sei der Zeittranslations-Operator um τ:

$$T_\tau : \psi(\vec{r}, t) \to \quad \psi(\vec{r}, t + \tau) \; .$$

Geben sie für den nicht-relativistischen Grenzfall den erzeugenden Operator für infinitesimale Zeittranslationen an. Stellen Sie für beliebige Zeittranslationen mit Hilfe dieses erzeugenden Operators T_τ dar [jeweils mit Beweis! Das System sei nicht explizit zeitabhängig].

c) Geben Sie die Slaterdeterminate für die Wellenfunktion zweier Elektronen, die sich mit entgegengesetztem Spin im Grundzustand [Wellenfunktion $\psi_0(\vec{r})$] befinden, in 1. und 2. Quantisierung an. (Dies entspricht z.B. einem He-Atom.)

3. Das erweiterte Hubbard-Modell auf zwei Plätzen *1.5+1.5+2.5+2.5=8 Punkte*

Betrachten Sie das folgende Modell für Elektronen auf zwei Gitterplätzen:

$$H = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(a^\dagger_{1,\sigma} a_{2,\sigma} + a^\dagger_{2,\sigma} a_{1,\sigma} \right) + U \sum_{i=1,2} n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} + V(n_{1,\uparrow} + n_{1,\downarrow})(n_{2,\uparrow} + n_{2,\downarrow}).$$

In dieser Formel sind $a^\dagger_{i,\sigma}(a_{i,\sigma})$ die Erzeugungs-(Vernichtungs-)Operatoren eines Elektrons mit Spin $S_z = +\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$ $(\sigma =\uparrow, \downarrow)$ auf dem Platz $i = 1, 2$, $n_{i,\sigma} = a^\dagger_{i,\sigma} a_{i,\sigma}$.

Berechnen Sie die Energie und die Entartung des *Grundzustands* des Systems

a) im Fall, dass das System nur *ein* Elektron hat (mit $t > 0, U > 0, V > 0$);

b) im Fall, dass das System *zwei* Elektronen hat, aber mit $U = V = 0, t > 0$ ("unkorreliertes System");

c) im entgegengesetzten Fall, für ein System mit *zwei* Elektronen, aber mit $t = 0, U > 0, V > 0$, in Abhängigkeit von den Werten von U und V. Geben Sie hier auch den/die entsprechenden Eigenvektor(en) in zweiter Quantisierung an.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Doppel-Besetzung pro Gitterplatz, d.h. $n_d = \frac{1}{2}(n_{1,\uparrow} n_{1,\downarrow} + n_{2,\uparrow} n_{2,\downarrow})$, im Grundzustand für die drei Fälle **a)**, **b)** und **c)** (mit $U \neq V$).

4. Rotation eines Spinors *1+2+1+3*+2=6+3* Punkte*

Gegeben sei die Spinor-Wellenfunktion eines freien Teilchens, das sich mit dem Impuls p in x-Richtung bewegt, d.h. $\mathbf{p} = (p, 0, 0)^{\mathrm{T}}$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p t - px)} \sqrt{mc^2 + E_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{cp}{mc^2+E_p} \\ \frac{cp}{mc^2+E_p} \end{pmatrix}, \quad E_p = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}$$

a) Geben Sie für diese Wellenfunktion den Erwartungswert $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{\mathbf{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}(\Sigma^x, \Sigma^y, \Sigma^z)^{\mathrm{T}}$ (wobei $\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$, und σ^i die Pauli-Matrizen sind) für ein ruhendes Teilchen, d.h. $p = 0$, an.

Das Koordinatensystem wird nun um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ im positiven Drehsinn um die y-Achse gedreht, d.h., schaut man in die positive y-Richtung so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.

b) Versuchen Sie die Spinor-Wellenfunktion $\psi'(\mathbf{r}', t')$ im gedrehten System mittels physikalischer Überlegungen zu ermitteln. Stellen Sie eine Vermutung für den Erwartungswert des Spinoperators im gedrehten System (wieder für $p = 0$) an.

c) Rotieren Sie zunächst nur die Raum-Zeit-Koordinaten von $\psi(\mathbf{r}, t)$.

d) Bonusfrage: Beweisen Sie ausgehend von der Formel $\mathbb{L} = e^{\frac{\varphi}{4}[\gamma^1, \gamma^3]}$, dass die Transformationsmatrix $\mathbb{L}$ im Spinorraum die Form $\mathbb{L} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1} + i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Sigma^y$ hat, wobei φ der Drehwinkel ist.

e) Benützen Sie das Ergebnis aus Beispiel d), um nun auch den Spinor in das rotierte Bezugssystem zu transformieren, und berechnen Sie den Erwartungswert des Spinoperators im gedrehten Bezugssystem für $p = 0$. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Vermutungen aus b).

Viel Erfolg!