

2. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Test B	Name:	Matrikelnummer:	B1	B2	B3	B4	Σ
			8	8	8	6+3*	30+3*

1. Hubbard-Modell mit Nächst-Nachbar-Wechselwirkung 1.5+1.5+2.5+2.5=8 Punkte

Betrachten Sie das folgende Modell für Elektronen auf zwei Gitterplätzen:

$$H = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(a_{1,\sigma}^\dagger a_{2,\sigma} + a_{2,\sigma}^\dagger a_{1,\sigma} \right) + U \sum_{i=1,2} n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} + U' (n_{1,\uparrow} + n_{1,\downarrow})(n_{2,\uparrow} + n_{2,\downarrow}).$$

In dieser Formel sind $a_{i,\sigma}^\dagger$ ($a_{i,\sigma}$) die Erzeugungs-(Vernichtungs-)Operatoren eines Elektrons mit Spin $S_z = +\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) auf dem Platz $i = 1, 2$, $n_{i,\sigma} = a_{i,\sigma}^\dagger a_{i,\sigma}$.

Berechnen Sie die Energie und die Entartung des *Grundzustands* des Systems

- a) im Fall, dass das System nur *ein* Elektron hat (mit $t > 0, U > 0, U' > 0$);
- b) im Fall, dass das System *zwei* Elektronen hat, aber mit $U = U' = 0, t > 0$ (“unkorreliertes System”);
- c) im entgegengesetzten Fall, für ein System mit *zwei* Elektronen, aber mit $t = 0, U > 0, U' > 0$, in Abhängigkeit von den Werten von U und U' . Geben Sie hier auch den/die entsprechenden Eigenvektor(en) in zweiter Quantisierung an.
- d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Doppel-Besetzung pro Gitterplatz, d.h. $n_d = \frac{1}{2}(n_{1,\uparrow} n_{1,\downarrow} + n_{2,\uparrow} n_{2,\downarrow})$, im Grundzustand für die drei Fälle **a**), **b**) und **c**) (mit $U \neq U'$).

2. Spin-Bahn-Kopplung 5+3=8 Punkte

Ein relativistischer Quanteneffekt ist die Spin-Bahn-Kopplung. Wenn sich die Elektronen nur in einer 2-dimensionalen Ebene bewegen mit einem Potentialgradient senkrecht hierzu, führt dies zur Spin-Bahn-Kopplung nach Rashba. Zusammen mit der kinetischen Energie ergibt sich der Hamilton-Operator (σ_x, σ_y sind die Paulimatrizen):

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \xi(p_y \sigma_x - p_x \sigma_y) \quad \text{mit } \xi \in \mathbb{R}.$$

- a) Geben Sie die (nicht unbedingt normierten) Eigenfunktionen und -energien des Hamiltonoperators an. (Überlegen Sie zunächst, in welcher Basis Sie am sinnvollsten rechnen.)
- b) Zeigen Sie, dass die Spinrichtung der Eigenfunktionen senkrecht zum Impuls steht, z.B. indem Sie den Erwartungswert von $\vec{p}\vec{\sigma}$ berechnen.

3. Verständnisfragen

2+3+3=8 Punkte

- a) Welche der folgenden Operatoren kommutiert mit der Klein-Gordon-Glg., d.h. mit $-\square - m^2 c^2 / \hbar^2$?

$$\begin{aligned} O_1 : \psi(\vec{r}, t) &\rightarrow \psi^*(\vec{r}, -t) \quad , \quad O_3 : \psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi(\vec{r}, -t) \\ O_2 : \psi(\vec{r}, t) &\rightarrow \psi^*(-\vec{r}, -t) \quad , \quad O_4 : \psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi(\vec{r} - \vec{v}t, t) \text{ mit } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

[Ohne Beweis. Jede richtige (falsche) Antwort +0.5 (-0.5) Punkte; Minimum 0 Punkte.]

- b) Gegeben sei der Zeittranslations-Operator um τ :

$$T_\tau : \psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi(\vec{r}, t + \tau) .$$

Geben sie für den nicht-relativistischen Grenzfall den erzeugenden Operator für infinitesimale Zeittranslationen an. Stellen Sie für beliebige Zeittranslationen mit Hilfe dieses erzeugenden Operators T_τ dar [jeweils mit Beweis! Das System sei nicht explizit zeitabhängig].

- c) Geben Sie die Slaterdeterminante für die Wellenfunktion zweier Elektronen, die sich mit entgegengesetztem Spin im Grundzustand [Wellenfunktion $\psi_1(\vec{r})$] befinden, in 1. und 2. Quantisierung an. (Dies entspricht z.B. einem He-Atom.)

4. Drehung eines Spinors

1+2+1+3*+2=6+3* Punkte

Gegeben sei die Spinor-Wellenfunktion eines freien Teilchens, das sich mit dem Impuls p in x -Richtung bewegt, d.h. $\mathbf{p} = (p, 0, 0)^T$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p t - px)} \sqrt{mc^2 + E_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{cp}{mc^2 + E_p} \\ \frac{cp}{mc^2 + E_p} \end{pmatrix}, \quad E_p = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}$$

- a) Geben Sie für diese Wellenfunktion den Erwartungswert $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{\mathbf{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ des Spinoperators

$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} (\Sigma^x, \Sigma^y, \Sigma^z)^T$ (wobei $\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$, und σ^i die Pauli-Matrizen sind) für ein ruhendes Teilchen, d.h. $p = 0$, an.

Das Koordinatensystem wird nun um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ im positiven Drehsinn um die y -Achse gedreht, d.h., schaut man in die positive y -Richtung so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.

- b) Versuchen Sie die Spinor-Wellenfunktion $\psi'(\mathbf{r}', t')$ im gedrehten System mittels physikalischer Überlegungen zu ermitteln. Stellen Sie eine Vermutung für den Erwartungswert des Spinoperators im gedrehten System (wieder für $p = 0$) an.
- c) Rotieren Sie zunächst nur die Raum-Zeit-Koordinaten von $\psi(\mathbf{r}, t)$.
- d) Bonusfrage: Beweisen Sie ausgehend von der Formel $\mathbb{L} = e^{\frac{\varphi}{4} [\gamma^1, \gamma^3]}$, dass die Transformationsmatrix \mathbb{L} im Spinorraum die Form $\mathbb{L} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1} + i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Sigma^y$ hat, wobei φ der Drehwinkel ist.
- e) Benützen Sie das Ergebnis aus Beispiel d), um nun auch den Spinor in das rotierte Bezugssystem zu transformieren, und berechnen Sie den Erwartungswert des Spinoperators im gedrehten Bezugssystem für $p = 0$. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Vermutungen aus b).

Viel Erfolg!