Musterlösung: Rashba Spin-Bahn-Kopplung

Lösung für Gruppe A; für Gruppe B: $\alpha \leftrightarrow \xi$.

a) Da der räumliche Anteil des Hamiltonoperators nur den Impuls enthält, wird man für den räumlichen Anteil der Wellenfunktion die Impulsbasis wählen, also $|\psi\rangle \equiv |\boldsymbol{p}\rangle \otimes (a\,|{\uparrow}\rangle + b\,|{\downarrow}\rangle)$ setzen. Der Hamiltonoperator wirkend auf einen solchen Zustand lautet als 2×2-Matrix im Spinraum

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \alpha \left(p_y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - p_x \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^2/2m & \alpha z \\ \alpha \bar{z} & \boldsymbol{p}^2/2m \end{pmatrix};$$

$$H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} E \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon a &= \alpha z b \\ \epsilon b &= \alpha \bar{z} a \end{aligned}$$

wobei $z := p_y + \mathrm{i} p_x =: \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $\epsilon := E - \boldsymbol{p}^2/2m$. Es folgt (wenn $|\psi\rangle$ normiert, und weil ϵ reell sein muss)

$$\frac{a}{\bar{b}} = \frac{b}{\bar{a}} \quad \Rightarrow \quad |a|^2 = |b^2| = \frac{1}{2},$$

$$\epsilon = \alpha z b/a \quad \Rightarrow \quad b/a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi};$$

$$\Rightarrow \quad E = \boldsymbol{p}^2/2m + \alpha|\boldsymbol{p}|, \quad |\psi\rangle = |\boldsymbol{p}\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|{\uparrow}\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan p_x/p_y}\,|{\downarrow}\rangle).$$

NB: Den Fall dass a, b, ϵ oder z (bzw. $\boldsymbol{p}$) Null ist mussten wir ausnehmen. Dann wäre aber entweder der Hamiltonoperator oder der «Eigenvektor» Null.

b) «Spin orthogonal zum Impuls» bedeutet $\langle \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} \rangle = 0$, was für die Eigenzustände gilt weil

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & p_x - \mathrm{i}p_y \\ p_x + \mathrm{i}p_y & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}z \\ +\mathrm{i}\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & +\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi} \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & +\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi} \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}.$$