1. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Test B **Name:** **Matrikelnummer:**

A1	A2	A3	A4	Σ
7	5+2*	11	8	30+2*

Hinweise:

- $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(-Y_1^1+Y_1^{-1}\right)=\frac{x}{r},\ i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^1+Y_1^{-1}\right)=\frac{y}{r},\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0=\frac{z}{r}$
- *Der Operator $\hat{x}$ ausgedrückt durch die Leiteroperatoren lautet* $\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-kx^2}=\sqrt{\frac{\pi}{k}};\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2e^{-kx^2}=-\frac{\partial}{\partial k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-kx^2}.$
- $j_0(kr)=\sin(kr)/kr$.

1. Partialwellen

2+4+1=7 Punkte

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens am zentralen Streupotential $V(r)=a\mathrm{e}^{-br}$.

a) Welche Bedingungen für a, b und den Wellenvektor k müssen erfüllt sein, sodass man sich auf s-Wellen-Streuung beschränken kann und die erste Bornsche Näherung anwendbar ist?

b) Berechnen Sie in erster Bornscher Näherung den differenziellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für eine s-Welle ($l=0$).

c) Berechnen Sie den entsprechenden totalen Streuquerschnitt σ_{tot}.

2. Obere Schranke der Grundzustandsenergie

5+2=5 + 2* Punkte*

Ein Teilchen der Masse m ist in einem (eindimensionalen) attraktiven deltaförmigen Potential gebunden. Der Hamiltonoperator des Systems in Ortsdarstellung lautet:

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}-a\delta(x)\qquad \text{mit } a\in\mathbb{R}^+$$

a) Berechnen Sie unter Verwendung der Testwellenfunktion

$$\psi(x)\sim e^{-bx^2}\qquad \text{mit } b\in\mathbb{R}^+$$

mithilfe des Rayleigh-Ritzschen Variationsverfahrens denjenigen Variationsparameter b, der die Energie des Systems minimiert. Geben Sie hieraus eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie des Hamilton-Operators an.

b) Vergleichen Sie diese Energie mit der tatsächlichen Grundzustandsenergie des Systems.

3. Fragen zum Verständnis der Vorlesung

2+2+3+2+2=11 Punkte

Gegeben sind drei Operatoren in der Spin-z-Basis mit $\langle\uparrow| \equiv (10)$, $\langle\downarrow| \equiv (01)$:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Welche dieser Operatoren können Dichtematrizen beschreiben? Welche beschreiben reine Zustände?

b) Geben Sie für die Dichtematrizen aus a) an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spin $+1/2$ in y-Richtung gemessen wird, sowie die Dichtematrix nach der Messung Spin $+1/2$ in y-Richtung.

c) Geben Sie für die folgenden Wellenfunktionen zweier Spins ("1" und "2") die auf das Untersystem Spin "1" reduzierte Dichtematrix an.

$$[|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - i|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2]/\sqrt{2} \qquad\qquad [|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2]/\sqrt{2}$$

d) Ein Wasserstoffatom befindet sich im angeregten Zustand $R_{21}(r)(Y_1^1(\Theta,\phi) - Y_1^{-1}(\Theta,\phi))/\sqrt{2}$ mit der Energie $E_2 = -\mathrm{Ry}/2^2$. Es wird ein konstantes elektrisches Feld in z-Richtung $\vec{E} = E_0\vec{e_z}$ eingeschaltet. Dessen Energiebeitrag sei sehr viel kleiner als E_2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Wasserstoffatom nach einer langen Zeit $t \to \infty$ in welchem Wasserstoff-Eigenzustand? (mit Begründung oder Rechnung)

e) Ein Wasserstoffatom befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand ($n = 1$, $l = 0$, $m = 0$), d.h., $R_{10}(r)Y_0^0(\Theta,\phi)$. Es wird ein elektrisches Feld in z-Richtung $\vec{E}(t) = E_0 \left[4t\frac{T-t}{T^2}\right] \vec{e_z}$ eingeschaltet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Atom für $t = T$ im Limes großer T in welchem Wasserstoff-Eigenzustand? (mit Begründung)

4. Zeitabhängige Störungstheorie

1.5+5+1.5=8 Punkte

Ein geladener eindimensionaler harmonischer Oszillator (Ladung q, Masse m und Oszillatorkreisfrequenz ω) befinde sich zur Zeit $t = 0$ in seinem Grundzustand. Danach wird zusätzlich ein elektrisches Feld in Oszillator-Richtung eingeschaltet mit Betrag

$$E(t) = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{t_0}} \qquad \text{mit } E_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ und } t_0 \in \mathbb{R}^+$$

a) Bestimmen Sie den vollständigen Hamiltonoperator des Systems. Teilen Sie den erhaltenen Hamiltonoperator in einen zeitunabhängigen ungestörten Anteil H_0 und einen zeitabhängigen Störterm $V(t)$ auf.

b) Geben Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür an, den Oszillator zu einem beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ in einem beliebigen angeregten Eigenzustand des ungestörten Systems zu finden. Welches Ergebnis ergibt sich im Limes $T \to \infty$?

c) Unter welcher Voraussetzung ist die Beschränkung auf die erste Ordnung der Störungstheorie möglich bzw. sinnvoll? Benutzen Sie zur Beantwortung dieser Frage Ihr Ergebnis aus b) und geben Sie einen mathematischen Ausdruck an, der die Größen E_0 und t_0 enthält.

Viel Erfolg!