Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

# 1. Übung zur Quantentheorie II

*Wintersemester 2012/2013*

<u>**TUTORIUM**</u>**: Freitag, 12.10.2012**.

## 1. Zeitentwicklung in unterschiedlichen Darstellungen *0.5+1+3+1.5=6 Punkte*

*Hinweis: Dieses Beispiel ist zum Teil eine Wiederholung aus Quantentheorie I. Es ist daher hilfreich, sich nochmals das Kapitel 6 "Drehimpuls und radialsymmetrische Potentiale" aus dem Skriptum zur Quantentheorie I sowie das Kapitel 1.3 "Bilder der Zeitentwicklung" aus dem Skriptum Quantenmechanik II in Erinnerung zu rufen.*

Betrachten Sie ein physikalisches System $|\Psi\rangle$ mit dem Drehimpuls

$$\hat{\mathbf{L}}^2|\Psi\rangle = \hbar^2 l(l+1)|\Psi\rangle = 2\hbar^2|\Psi\rangle.$$

Das System befindet sich in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ und wird durch folgenden Hamiltonian beschrieben:

$$H = -g_L \mu_B \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}.$$

Dabei sind $g_L$ und $\mu_B$ positive reelle Konstanten und $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$.

**a)** Welche verschiedene Einstellungen des Drehimpulses sind bezüglich der z-Achse möglich?

**b)** Geben Sie die explizite Form des Hamiltonians in der $L_z$-Basis an. Teilen Sie den Hamiltonian folgendermaßen auf:

$$H = \underbrace{H_0}_{L_z\text{-Anteil}} + \underbrace{V}_{L_x\text{-Anteil}} .$$

**c)** Das System befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Eigenzustand $|\Psi(t = 0)\rangle = |m = -1\rangle$ des ungestörten Hamiltonians $H_0$. Geben Sie dessen Zeitentwicklung im

i) Schrödingerbild,

ii) Heisenbergbild und

iii) Wechselwirkungsbild (mit der Aufteilung des Hamiltonians wie in **b)**)

für beliebige Zeiten $t > 0$ an. Zur numerischen Vereinfachung der Rechnung nehmen Sie an, dass $B_x = \sqrt{2}B_z = \sqrt{2}B$ gilt.

**d)** Berechnen Sie den Erwartungswert der Observablen $L_z$ in allen drei Bildern für beliebige Zeiten $t > 0$. Nehmen Sie wiederum an, dass $B_x = \sqrt{2}B_z = \sqrt{2}B$ gilt. Was fällt Ihnen auf?

## 2. Ritzsches Variationsverfahren

*2+2=4 Punkte*

*Hinweis: Dieses Beispiel ist zum Teil eine Wiederholung aus Quantentheorie I. Es ist daher hilfreich, sich nochmals das Kapitel 3.2 "Der Harmonische Oszillator" aus dem Skriptum zur Quantentheorie I und Kapitel 2.1 "Zeitunabhängige Störungstheorie" aus dem Skriptum zu Quantentheorie II in Erinnerung zu rufen.*

Ein Teilchen wird in eine gestörte eindimensionale Falle gesperrt:

$$H = H_0 + V = \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{H_0} + \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2M}}_{V} \quad \text{mit } m, M, \omega \in \mathbb{R}^+$$

**a)** Geben Sie unter Verwendung der Testwellenfunktion

$$\Psi(x; \alpha) = c e^{-\alpha x^2} \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

mittels des Rayleigh-Ritzschen Variationsverfahrens eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie dieses Systems an.

**b)** Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus **a)** mit der 1. und 2. Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für die Grundzustandsenergie des Systems. Was fällt Ihnen auf?