Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

2. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 19.10.2012.

3. Zeitabhängige anharmonische Störung

2+2+1=5 Punkte

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, der ab dem Zeitpunkt $t = 0$ durch eine Anharmonizität gestört wird:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + f(t)x^4\Theta(t)$$

Das System befindet sich vor dem Auftreten der Störung ($t < 0$) im Grundzustand.

a) Die Störung sei für $t \geq 0$ zeitunabhängig:

$$f(t) = f_0$$

Geben Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür an, das System für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ in einem angeregten Zustand des ungestörten Problems zu finden.

b) Die Störung klingt mit der Abklingzeit τ exponentiell ab:

$$f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Geben Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Übergangsamplitude und Übergangswahrscheinlichkeit dafür an, das System für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ in einem angeregten Zustand des ungestörten Problems zu finden. Welches Resultat ergibt sich für $t \to \infty$?

c) Plotten Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten aus a) und b) als Funktion der Zeit t (beispielsweise mit `http://www.wolframalpha.com`) und vergleichen Sie sie miteinander. Wählen Sie für die Konstanten zwar sinnvolle aber einfache Werte. Probieren Sie auch verschiedene Abklingzeiten aus. Was passiert für lange Abklingzeiten?

4. Methoden zeitabhängiger Störungstheorie *1.5+2.0+1.5=5 Punkte*

Der Hamiltonoperator eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens im Magnetfeld lautet:

$$H = -\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -g_S \mu_B \frac{\hbar}{2} \sigma \cdot \mathbf{B}$$

Dabei bezeichnen die σ_i die Pauli-Matrizen. Das Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem magnetischen Feld (die Quantisierungsachse ist die z-Achse):

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_z)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im $|\uparrow\rangle$-Zustand und es wird ein zusätzliches Magnetfeld eingeschalten. Der Einschaltvorgang wird durch

$$\mathbf{B}_r = (B_x(1 - e^{-\omega t}), 0, 0)$$

beschrieben.

a) Wie müssen (ohne Beweis) B_x, B_z und ω zueinander in Beziehung stehen, um dieses Problem

- i) in sudden approximation,
- ii) in adiabatischer Näherung bzw.
- iii) nach Substitution $(1 - e^{-\omega t}) \to \sin(\omega t)$ mit Fermis Goldener Regel

behandeln zu können?

b) Berechnen Sie nach Substitution $(1 - e^{-\omega t}) \to \sin(\omega t)$ für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen im Zustand $|\downarrow\rangle$ zu finden, in erster Ordnung Störungstheorie. Beachten Sie dabei, dass das Ergebnis aus mehreren Beiträgen besteht.

c) Berechnen Sie für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen im Zustand $|\downarrow\rangle$ zu finden, in der sudden approximation. Benutzen Sie dazu die Näherung aus Ihren Überlegungen aus Punkt a) und die zusätzliche Bedingung $B_x = \frac{3}{4} B_z$.