Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

3. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

TUTORIUM: Freitag, 09.11.2012.

5. Streuung an einem quaderförmigen Nanopartikel

2+2=4 Punkte

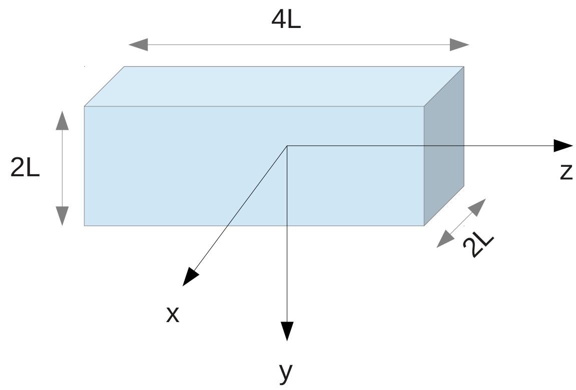
Ein Teilchen, das entlang der $z-$Achse mit Impuls $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ fliegt, werde von einem quaderförmigen Nanopartikel bei $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ elastisch gestreut. Das entsprechende Streupotential kann geschrieben werden als

$$V(x, y, z) = \begin{cases} V_0 > 0, & \text{wenn } |x| < L, |y| < L \text{ und } |z| < 2L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

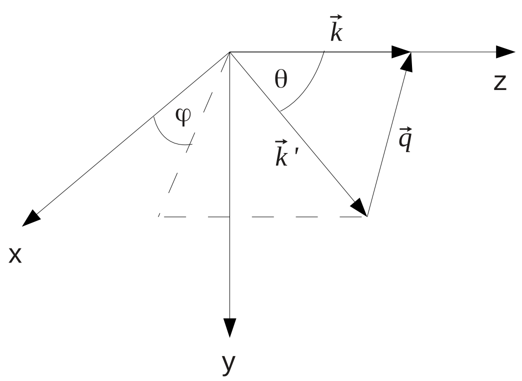
(siehe Abbildung a)).

a) Berechnen Sie in Bornscher Näherung den entsprechenden differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)$, wobei Neigungswinkel θ und Azimutwinkel φ wie in Abbildung b) definiert sind.

b) Berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt σ_{tot} im Limes kleiner Energie des einfallenden Teilchens ($kL \ll 1$) unter der Annahme, dass V_0 klein genug für die Gültigkeit der Bornschen Näherung ist.



(a) Geometrie des Streuzentrums



(b) Geometrie der Streuimpulse

6. Dichtematrix und reduzierte Dichtematrix *1.5+1.5+1+1+1=6 Punkte*

Ein quantenmechanisches System bestehe aus einem Teilsystem 1 das ein Spin-1/2-Teilchen beschreibt und zu Beginn ($t = 0$) im Zustand

$$|\psi_1\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1 + i|\downarrow\rangle_1}{\sqrt{2}}$$

sei. Das zweite Teilsystem bestehe ebenfalls aus einem Spin-1/2-Teilchen und sei zu Beginn im Zustand

$$|\psi_2\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle_2 + \beta\,|\downarrow\rangle_2 \quad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Die beiden Teilsysteme wechselwirken über eine Spin-Spin-Wechselwirkung der Form

$$H = \hbar g\,\big(|\uparrow\rangle_1\,{}_1\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle_1\,{}_1\langle\downarrow|\big)\,\big(|\uparrow\rangle_2\,{}_2\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle_2\,{}_2\langle\downarrow|\big).$$

mit der Kopplungskonstanten $\hbar g$ miteinander.

a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Gesamtsystems mit folgender Anfangswellenfunktion:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$$

b) Wie lautet die Dichtematrix des Gesamtsystems $\hat{\rho}(t)$ für $t = 0$ und $t > 0$? Geben Sie diese explizit in der Basis $\{|\uparrow\rangle_1\,|\uparrow\rangle_2, |\uparrow\rangle_1\,|\downarrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1\,|\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1\,|\downarrow\rangle_2\}$ an!

c) Wie lautet die auf Teilsystem 1 reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_1(t)$ für $t = 0$ und $t > 0$? Geben Sie diese explizit in der Basis $\{|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1\}$ an!

d) Zu welchen Zeiten entspricht die Dichtematrix aus b) bzw. die reduzierte Dichtematrix aus c) einem reinen Zustand?

e) Berechnen Sie das Zeitmittel der reduzierten Dichtematrix aus c) mittels

$$\overline{\hat{\rho}_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\,\hat{\rho}_1(t)$$