Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

4. Übung zur Quantentheorie II

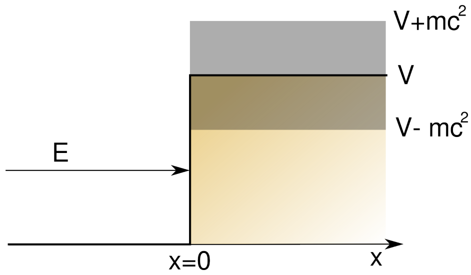
Wintersemester 2012/2013

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 7.12.2012.
Hinweis: Für diese Übung können sie die Lösungen der freien Dirac-Gleichung, die im letzten Plenum präsentiert wurden verwenden. Berücksichtigen Sie aber, dass die Bewegung des Teilchens in den unten angeführten Beispielen nur in x-Richtung stattfindet.

7. Kleinsches Paradoxon

2+3=5 Punkte

Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:



mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; x < 0 \\ V & \text{für } \; x \geq 0 \; . \end{cases}$$

Das System wird demnach durch folgende (stationäre) Dirac-Gleichung beschrieben:

$$[c\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V\theta(x)]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad E > 0, V > 2mc^2 \tag{1}$$

Nehmen Sie nun an, dass ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$ und Spin $\uparrow$ von $x = -\infty$ kommend auf die Stufe trifft.

a) Der Ansatz für den Eigenzustand $\psi(\mathbf{r})$ in Gleichung (1) lautet

$$\psi(x) = \psi_I(x)\theta(-x) + \psi_{II}(x)\theta(x), \tag{2}$$

wobei $\psi_I(x)$ und $\psi_{II}(x)$ Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind. Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi_I(x)$ so dass sie einem einlaufenden Elektron mit Spin $\uparrow$ und einem an der Barriere reflektierten Elektron mit Spin $\uparrow$ oder Spin $\downarrow$ entspricht.

b) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion $\psi_{II}(x)$ für die Fälle

- $E > V + mc^2$
- $V + mc^2 > E > V$
- $V - mc^2 > E > mc^2$

und bestimmen Sie mittels der Stetigkeitsbedingung für die Gesamtwellenfunktion bei $x = 0$ die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle. Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten, d.h. das Quadrat des Verhältnisses der Amplituden von einlaufender und reflektierter Welle. Welchen Spin haben das reflektierte bzw. transmittierte Teilchen?

8. Relativistisches Wellenpaket

1+2+2=5 Punkte

Betrachten Sie folgende Anfangsbedingung für die freie Dirac-Gleichung

$$\psi(x, t = 0) = \psi_0(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2D^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass die Wellenfunktion $\psi_0(x)$ normiert ist.

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung $\psi(x, t)$ der Wellenfunktion $\psi_0(x)$ für $t > 0$ indem Sie $\psi_0(x)$ in Eigenfunktionen des (freien) Dirac-Operators entwickeln.

c) Betrachten Sie das Verhältnis der Koeffizienten, die zum Spinor mit positiver ($E = +\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$) bzw. negativer ($E = -\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$) Energie gehören. Was passiert für $D \to \infty$ bzw. für $D \to 0$ (lokalisiertes Elektron)?