Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held, Priv. Doz. Dr. A. Toschi
D.I. G. Rohringer, T. Schäfer

5. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2012/2013

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 21.12.2012.

9. Lorentz-Transformation eines Spinors

1+1+1+2=5 Punkte

Gegeben sei die Spinor-Wellenfunktion eines freien Teilchens, das sich mit dem Impuls $\mathbf{p} = (p = m\gamma v, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, in x-Richtung bewegt:

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}t-px)}\sqrt{mc^2+\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{cp}{mc^2+\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}}\end{pmatrix} \tag{1}$$

Beachten Sie, dass der Spinor (im Gegensatz zum 3. Plenum) nun auf $\sqrt{2E_p}$, $E_p = \sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}$, normiert ist (Energienormierung). Der Spinor soll nun mit einer aktiven Lorentztransformation mit Geschwindigkeit $-\frac{v}{c} = -\frac{cp}{E_p}$ in x-Richtung transformiert werden.

a) Welches Ergebnis würden Sie erwarten?

b) Lorentz-Transformieren Sie zunächst nur die Raum-Zeit-Koordinaten von $\psi(\mathbf{r},t)$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Formel $\mathbb{L} = e^{-\frac{i}{2}\lambda(i\alpha_x)}$, dass die Transformationsmatrix $\mathbb{L}$ im Spinorraum die Gestalt $\mathbb{L} = \mathbb{1}\cosh(\frac{\lambda}{2}) + \alpha_x \sinh(\frac{\lambda}{2})$ hat.

d) Benützen Sie das Ergebnis aus Beispiel c), um nun auch den Spinor in das bewegte Bezugssystem zu transformieren. Beachten Sie hierbei: $\cosh\lambda = \gamma \Rightarrow \cosh(\frac{\lambda}{2}) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$ und $\sinh(\frac{\lambda}{2}) = -\frac{v}{c}\frac{\gamma}{1+\gamma}\cosh(\frac{\lambda}{2})$.

10. Runge-Lenz-Vektor

2+2+1=5 Punkte

Betrachten Sie das nicht-relativistische Wasserstoffatom, dessen Hamilton-Operator durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\hat{\mathbf{r}}|} \tag{2}$$

gegeben ist und den (klassischen) Runge-Lenz Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}(\mathbf{p})^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p} - \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{3}$$

wobei $r = |\mathbf{r}|$ ist.

a) Zeigen Sie dass die quantisierte Form des Runge-Lenz-Vektors folgende Gestalt hat:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{p}})^2 - (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}} - \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\hat{\mathbf{r}}|} + i\hbar\hat{\mathbf{p}}. \tag{4}$$

Erklären Sie den zusätzlichen quantenmechanischen Beitrag $i\hbar\hat{\mathbf{p}}$. (Beachten Sie hierzu, dass die quantisierte Version des Runge-Lenz-Vektors ein hermitscher Operator sein muss.)

b) Zeigen Sie, dass der (quantisierte) Runge-Lenz-Vektor mit dem Hamilton-Operator des Systems kommutiert, d.h., dass $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{H}] = 0$.

c) $\hat{\mathbf{A}}$ ist speziell für das Wasserstoffatom eine Erhaltungsgröße. Überlegen Sie wie dies mit der Entartung des Spektrums zusammenhängen könnte.