1. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 11.10.2013

1. Impulsverteilung des H-Atoms

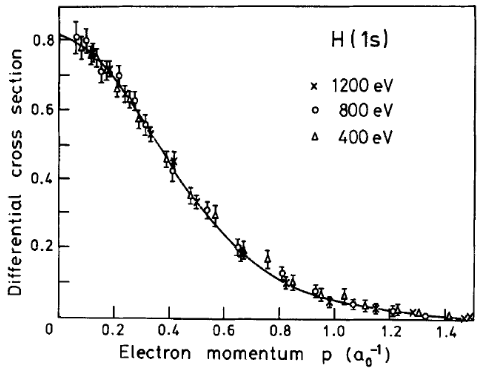

Abbildung 1: Impulsverteilung der Elektronen im Grundzustand des Wasserstoffatoms, gemessen durch Elektronenstrahlen mit verschiedenen Einfallsenergien [nach Weigold, AIP Conf. Proc. **86**, 1 (1982)].

In einem Experiment, das im Jahr 1982 durchgeführt wurde, gelang es erstmals die Impulsverteilung des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms direkt zu messen. Dazu wurde ein hochenergetischer Strahl von Elektronen auf Wasserstoffatome gerichtet um diese zu ionisieren. Die gesuchte Impulsverteilung $|\langle\vec{p}|\psi\rangle|^2$ der *atomaren* Elektronen im Zustand H(1s) ist nun direkt proportional zum "differentiellen Streuquerschnitt" der *einfallenden* Elektronen welcher im Experiment unmittelbar zugänglich war (siehe Abb. 1).

(a) Berechnen Sie die gesuchte Impulsverteilung $|\langle\vec{p}|\psi\rangle|^2$ des Grundzustandes. Wenn Ihr Ergebnis richtig ist, sollte es genau mit der durchgezogenen Linie in der Abbildung übereinstimmen. Wieso hängt Ihr Ergebnis offenbar nur vom Betrag des Impulses $|p|$ ab?

(b) Nehmen Sie an, dass in einem zweiten Experiment anstatt der Wasserstoffatome einfach positiv geladene Helium-Atome (He^+) als Target für den Elektronenstrahl verwendet werden. Wie ändert sich die Impulsverteilung im entsprechenden Grundzustand des atomaren Elektrons im Vergleich zu (a)? Bringen Sie Ihr Ergebnis mit der Heisenbergschen Unschärferelation in Verbindung.

2. Gebundener Zustand des δ-Potentials

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung (SG) für ein anziehendes δ-Potential,

$$\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2\kappa}{m}\delta(x)\right]|E\rangle = E|E\rangle, \tag{1}$$

in den folgenden Schritten:

(a) Stellen Sie (1) im Impulsraum dar. Setzen Sie die Energie des gebundenen Zustands $|E\rangle$ mit $E = -q^2/2m$, $q > 0$ an und bestimmen Sie die Lösung der SG (bis auf eine Konstante) im Impulsraum.

(b) Geben Sie die Rücktransformation der Lösung aus Teil (a) in die Ortsdarstellung an und werten Sie diese zunächst nur im Punkt $x = 0$ aus, um q zu bestimmen. Bestimmen Sie die verbleibende Normierungskonstante durch Auswertung des Normierungsintegrals im Impulsraum und setzen Sie $\psi_E(x = 0) > 0$ voraus.

(c) Vergleichen Sie Ihre Lösung im Impulsraum mit jener im Ortsraum (siehe Hinweis). Welche Beziehung finden Sie somit zwischen der Breite der Wellenfunktion im Impulsraum und der im Ortsraum? Motivieren Sie die Richtigkeit Ihrer Ergebnisse auf physikalischer Basis.

Hinweis: Die Lösung im Ortsraum kann ohne Beweis z.B. aus Aufgabe 2 des zweiten Tutoriums der Quantentheorie I im WS12/13 übernommen werden: `http://quanten.at/quanten1_WS12/tut2.pdf`.
Fakultativ kann man die Lösung auch durch Rücktransformation des in (a) erhaltenen Ausdrucks gewinnen, z.B. mit Hilfe des Residuensatzes. Überlegen Sie sich in diesem Fall, in welcher Halbebene der Integrationsweg geschlossen werden muss, damit dieser Teil des Weges nicht zum Integral beiträgt.

3. Zwei Spins $s = 1/2$ mit der Wechselwirkung

Der Hamiltonoperator eines Systems von zwei (unterscheidbaren) Spins $s = 1/2$ sei durch

$$H = \frac{1}{\hbar}\left(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}\right) + \lambda \frac{4}{\hbar^2} S_x^{(1)} S_x^{(2)} \tag{2}$$

gegeben (Energie in geeigneten Einheiten gemessen). Stellen Sie H als Matrix in der $\{m_{S1} m_{S2}\}$-Basis dar und bestimmen Sie die Grundzustandsenergie E_0 und den zugehörigen auf 1 normierten Eigenvektor $|u_0\rangle$ durch Diagonalisierung dieser Matrix.

Zu kreuzen: 1,2a,2bc,3