2. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 25.10.2013

1. Betrachtet wird die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem homogenen Kraftfeld $V(x) = -K \cdot x$ $(K > 0)$.

   (a) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $x_H(t), p_H(t)$ der Orts- bzw. Impulsvariablen im Heisenbergbild (kanonische Bewegungsgleichungen).

   (b) Drücken Sie die Erwartungswerte der Orts- und Impulsvariablen zum Zeitpunkt t durch ihre Anfangswerte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und die Zeit t aus. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Ehrenfest-Theorems durch einen Vergleich dieser Ergebnisse mit den klassischen Variablen $x(t)$, $p(t)$.

   (c) Berechnen Sie die Kommutatoren

   $$[x_H(t_2), x_H(t_1)]\,,\ [p_H(t_2), p_H(t_1)]\,,\ [x_H(t_2), p_H(t_1)]\,.$$

   (Schrödingerbild und Heisenbergbild sollen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zusammenfallen.)

   (d) Gegeben sei der Kommutator $[A, B] = \alpha \cdot \mathbb{1}$ für zwei Operatoren im Schrödingerbild. Berechnen Sie den entsprechenden Kommutator im Heisenbergbild, $[A_H(t), B_H(t)]$.

2. Ein Elektronenspin befindet sich in einem Magnetfeld $B = (0, B, 0)$ mit folgendem Hamiltonoperator $H = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{eB}{mc} S_y$.

   (a) Berechnen Sie die Paulimatrizen $\sigma_{x,H}(t)$, $\sigma_{y,H}(t)$ und $\sigma_{z,H}(t)$ im Heisenbergbild indem Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichungen lösen. Schrödingerbild und Heisenbergbild sollen bei $t = 0$ zusammenfallen.

   (b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Spin im Zustand $|\chi(0)\rangle$ mit $S_z|\chi(0)\rangle = -\hbar/2|\chi(0)\rangle$. Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die Erwartungswerte der drei Spinkomponenten für $t \geq 0$. Zeigen Sie auf Basis Ihrer Ergebnisse für die Bewegung des Vektors $\langle\vec{\sigma}\rangle_t$ mit welcher Frequenz und um welche Achse der Spin im Magnetfeld präzediert.

   (c) Stellen Sie Ihre Lösung aus (b) für $\langle\vec{\sigma}\rangle_t$ mit Hilfe der Bloch-Kugel dar und überlegen Sie (ohne Rechnung), in welche Richtung Sie ein Magnetfeld anlegen müssen, damit der Spin $|\chi(0)\rangle$ bei seiner Präzession zu einem späteren Zeitpunkt t_0 den Erwartungswert $\langle S_y(t_0)\rangle = \pm\hbar/2$ haben wird. Bestimmen Sie den entsprechenden Zeitpunkt t_0.

3. (a) In der Vorlesung wurden die Bewegungsgleichungen für Operatoren und deren Erwartungswerte hergeleitet. Zeigen Sie die folgende *verallgemeinerte* Bewegungsgleichung für den Erwartungswert eines zeitunabhängigen Operators $\hat{A}$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$, wobei die Hermitizität des Hamiltonoperators $\hat{H}$ *nicht* vorausgesetzt wird:

   $$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}\hat{H} - \hat{H}^\dagger\hat{A}|\psi(t)\rangle. \tag{1}$$

Hinweis: Gehen Sie von der Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ und der konjugierten Gleichung $-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|\hat{H}^\dagger$ aus und nutzen Sie die Kettenregel.

(b) Nehmen Sie nun an, dass $\hat{H}$ hermitesch sei. Was folgt daraus für die zeitliche Entwicklung der Zustandsnorm $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$?

(c) Betrachten Sie nun einen Hamiltonoperator der Form $\hat{H} = \hat{\mathcal{H}} - i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathcal{V}}$. Hierbei seien $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^\dagger$ und $\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{V}}^\dagger$ hermitesche Operatoren und $\gamma \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante. Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\frac{\gamma}{\hbar}\langle\psi(t)|\mathcal{V}|\psi(t)\rangle. \tag{2}$$

Welcher fundamentale Unterschied ergibt sich somit für die Zustandsnorm? Machen Sie sich das Ergebnis anhand folgenden Beispiels klar, wobei der Einfachheit halber ein eindimensionaler Hilbertraum mit normiertem Vektor $|1\rangle$ und Operatoren $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{V}} = \hat{1}$ angenommen werden soll: Geben Sie dazu die explizite Zeitabhängigkeit von $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ an mit $\gamma > 0$ und $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, d.h., $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$.

Hinweis: Solche sog. *effektiven* Hamiltonoperatoren werden z.B. für die Beschreibung offener Quantensysteme genutzt. Dabei stellt $\mathcal{V}$ gerade die Kopplung des Systems $\mathcal{H}$ an eine Umgebung dar, in welche Aufenthaltswahrscheinlichkeit abfließen kann, d.h., in welche das Teilchen "entkommen" kann. Dies ist z.B. beim Auskoppeln von Laserlicht aus einer Kavität (System) in das Labor (Umgebung) der Fall.

Zu kreuzen: 1,2ab,2c,3