3. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 08.11.2013

1. Spin-Mischung und Bloch-Kugel

Ein Elektron befinde sich in einem zeitlich konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\hat{e}_y$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bei einer Messung von S_z den Messwert $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten, wenn das Elektron zum Zeitpunkt $t = 0$

i. durch das statistische Gemisch mit Dichteoperator

$$\rho = p|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (1-p)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,, \quad p \in [0,1]$$

ii. durch den reinen Zustand

$$|\chi\rangle = \sqrt{p}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sqrt{1-p}|\downarrow\rangle, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad p \in [0,1]$$

beschrieben wird ($\sigma_z|\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle$, $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$). Vergleichen Sie die unter (i) und (ii) gefundenen Ergebnisse als Funktion der Relativphase δ und geben Sie deren Differenz eine physikalische Bedeutung.

(b) Betrachten Sie die Zeitentwicklung eines allgemeinen Dichteoperators ρ. Wie verändert sich $\mathrm{Tr}\,(\rho^2)$ mit der Zeit? Welchen Schluss können Sie daraus ziehen?

(c) Verwenden Sie den reinen Zustand $|\chi\rangle$ aus Punkt (a) und parametrisieren Sie ihn neu mittels der Substitution $p = \cos^2\theta/2$ mit $\theta \in [0, \pi]$. Überlegen Sie (kurz), warum diese Parametrisierung zu jener aus (a) äquivalent ist. Zeigen Sie nun durch explizites Berechnen, dass der (Bloch-)Vektor $\vec{a} = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle)^T$ immer auf der Einheitskugel liegt. Argumentieren Sie (ohne Rechnung) wie Sie auf Basis Ihrer Ergebnisse jedem reinen Spin-Zustand $|\chi\rangle$ einen Punkt auf der Bloch-Kugel eindeutig zuordnen können.

(d) Die in (c) gezeigte Zuordnung lässt sich nun auch auf Dichtematrizen ausdehnen. Betrachten Sie dazu folgende Darstellung einer Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{a}\,\overset{\leftrightarrow}{\sigma}\right)$$

mit beliebig gewähltem $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie zuerst, dass ρ hermitesch ist und, dass $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ gilt. Zeigen Sie weiters, dass auch hier gilt: $\vec{a} = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle)^T$. Welche Länge kann der Bloch-Vektor $\vec{a}$ für einen gemischten Zustand minimal bzw. maximal annehmen? Ordnen Sie somit den Bloch-Vektoren $\vec{a}$ für gemischte Zustände Punkte innerhalb der Blochkugel zu. Welche Dichtematrix ρ aus (a) entspricht in diesem Fall dem Mittelpunkt der Blochkugel?

2. Thermodynamik eines Spins im Magnetfeld

Betrachten Sie einen Spin in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ bei einer Temperatur T.

(a) Überlegen Sie zunächst welcher Zustand für den Spin energetisch am günstigsten ist. Wie groß sind daher die Besetzungswahrscheinlichkeiten $P_\uparrow$ (für Spin-up) und $P_\downarrow$ (für Spin-down) im Fall $T = 0$?

(b) Berechnen Sie nun diese Besetzungswahrscheinlichkeiten für eine endliche Temperatur $T > 0$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

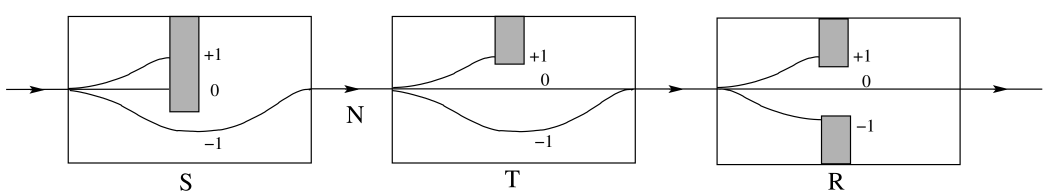
(c) Berechnen Sie im nächsten Schritt den Erwartungswert $\langle \mu_z \rangle$ des magnetischen Moments in z-Richtung. Wie verhält sich dieser in den Grenzfällen $T \to 0$ und $T \to \infty$?

(d) Betrachten Sie nun ein Ensemble von N (nicht-wechselwirkenden) Spins. Welche Magnetisierung ruft das magnetische Feld bei einer Temperatur T hervor? Leiten Sie daraus für hohe Temperaturen $T \gg 1$ das Curie'sche Gesetz für die magnetische Suszeptibilität χ ab (siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Curiesches_Gesetz.`)

(e) Berechnen Sie die Unschärfe der Magnetisierung als Funktion der Temperatur T und stellen Sie diese grafisch dar.

3. Gekoppelte Stern-Gerlach-Apparate

Ein unpolarisierter Strahl von neutralen Spin-1 Teilchen falle in positiver y-Richtung auf die in der Abbildung dargestellte Anordnung von gekoppelten Stern-Gerlach-Apparaten ein. Dabei besitze der Stern-Gerlach-Apparat S einen Feldgradienten in positive z-Richtung bzw. R einen Feldgradienten in positive x-Richtung. Der Feldgradient des dazwischenliegenden Spin-Filters T habe ebenfalls einen Feldgradienten in der xz-Ebene, der jedoch zwischen jenen von S und R variiert werden kann. Nehmen Sie nun an, dass N (Teilchen pro Sekunde) die Intensität des Strahls sei, welcher den S-Apparat verlässt. Wie muss nun der Feldgradient von T in der xz-Ebene gelegt werden, damit die Intensität des Strahls, welcher den R-Apparat verlässt, minimal wird? Wie groß ist diese minimale Intensität? Führen Sie Ihre Rechnungen sowohl mit Dichtematrizen als auch mit Wellenfunktionen durch und überprüfen Sie die Gleichheit Ihrer jeweiligen Ergebnisse (siehe dazu Anhang A.10 aus Übungsaufgaben Grau `http://www.dietrich-grau.at/`)
Hinweis: Verwenden Sie die Elemente der Drehmatrix aus dem Skriptum.



Zu kreuzen: 1ab,1cd,2,3