

5. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 13.12.2011

1. Atomkern mit endlicher Ausdehnung

Betrachten Sie den Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms. Neben den Feinstruktur-Korrekturen zur Grundzustandsenergie wie im Skriptum besprochen (Kapitel 9.1.1), können im Experiment auch Energiekorrekturen durch den endlichen Radius des Atomkerns spektroskopisch festgestellt werden. Diese durch die endliche Ausdehnung des Atomkerns verursachte Störung soll nun abgeschätzt werden.

- (a) Bestimmen Sie zuerst die entsprechend modifizierte potentielle Energie, die vom Elektron in der Nähe des Kerns wahrgenommen wird. Nehmen Sie als Modell für den Atomkern eine Kugel mit Radius R und Ladung Ze an, die über das ganze Volumen der Kugel homogen verteilt ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Kernradius $R \approx R_0 A^{1/3}$ (mit $R_0 \approx 1.5 \times 10^{-15} m$ und A : Nukleonenzahl), wodurch $R \ll a_0$ (mit a_0 : Bohr-Radius des Elektrons).

- (b) Diese Modifikation des Coulomb-Potentials führt zu einer Energiekorrektur des elektronischen Grundzustands, die Sie nun in 1. Ordnung Störungstheorie berechnen sollen. Diskutieren Sie, wieso derartige Korrekturen im Experiment am besten durch Messung an verschiedenen Isotopen des gleichen Atoms festgestellt werden können. Wie groß sind die von Ihnen gefundenen Energiekorrekturen im Vergleich mit den Feinstruktur-Verschiebungen aus dem Skriptum?

2. Variationsverfahren

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r},$$

welcher das Elektron eines Wasserstoffatoms mit der reduzierten Masse μ beschreibt. Bestimmen Sie eine Näherung E_0^{var} für die Grundzustandsenergie E_0 von H mit Hilfe des Variationsverfahrens. Verwenden Sie hierzu die Testfunktionen

$$\psi_T(\vec{r}, \alpha) = \langle \vec{r} | \psi_T \rangle(\vec{r}, \alpha) = e^{-\frac{r}{\alpha}}, \quad r = |\vec{r}|,$$

mit dem Variationsparameter $\alpha > 0$.

- (a) Bestimmen Sie zunächst die Norm $\langle \psi_T | \psi_T \rangle$ und berechnen Sie dann das Energie-Funktional

$$E[\psi_T] = \frac{\langle \psi_T | H | \psi_T \rangle}{\langle \psi_T | \psi_T \rangle}(\vec{r}, \alpha).$$

- (b) Bestimmen sie das Minimum von $E[\psi_T]$ durch Variationsrechnung. Ist Ihr Ergebnis exakt? Warum / Warum nicht?

3. Entartete Störungstheorie

Der Hamiltonoperator eines Systems von zwei (unterscheidbaren) Spins $s = 1/2$ sei durch

$$H = \frac{1}{\hbar} (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + \lambda \frac{4}{\hbar^2} S_x^{(1)} S_x^{(2)}$$

gegeben (Energie in geeigneten Einheiten gemessen) mit $0 < \lambda \ll 1$. Die exakten Lösungen für die Eigenenergien E_i dieses Systems haben Sie in Aufgabe 3 des 1. Tutoriums bereits berechnet. Zerlegen Sie nun H in der Form

$$\begin{aligned} H &= H_0 + W \\ H_0 &= \frac{1}{\hbar} (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) \\ W &= \lambda \frac{4}{\hbar^2} S_x^{(1)} S_x^{(2)} \end{aligned}$$

und bestimmen Sie zunächst alle Eigenenergien E_i^0 von H_0 . Berechnen Sie nun die Energiekorrekturen erster Ordnung $\varepsilon_i^{(1)}$ sowie die daraus für E_i bei Beschränkung auf die erste Ordnung in λ folgenden Näherungswerte $E_i^{[1]} = E_i^0 + \varepsilon_i^{(1)}$. Vergleichen Sie $E_i^{[1]}$ mit den exakten Größen E_i und kommentieren Sie die Ergebnisse.

Zu kreuzen: 1a/1b/2/3