6. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 17.01.2014

1. Fermionen in optischer Falle

Zwei nicht-wechselwirkende identische Spin-1/2-Atome werden nach starker Abkühlung in einer optischen Falle gefangen, deren Potential als harmonisch angenommen werden kann (eindimensionales Problem $V(x) = m\omega^2 x^2/2$).

(a) Wodurch sind die drei niedrigsten Energieeigenwerte E_0, E_1, E_2 gegeben und wie groß sind deren Vielfachheiten (Entartungsgrade)?

(b) Geben Sie für jeden der drei zu den Energien E_0, E_1, E_2 gehörigen Eigenräume ein orthonormiertes Basissystem an (in Ketschreibweise).

(c) Das Zweiteilchensystem sei im tiefsten Energieeigenzustand für den beide Spins $m_1 = m_2 = -1/2$. Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit *ein* Teilchen im Intervall $(-\infty, 0)$ zu messen und *ein* Teilchen im Intervall $(0, +\infty)$? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

(d) Lösen Sie die Punkte (a) und (b) für den Fall dass die beiden Teilchen voneinander unterscheidbar sind.

2. Teilchen in zeitabhängigen Potential

Ein Teilchen der Ladung q befinde sich im Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz ω. Berechnen Sie (in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie) die Wahrscheinlichkeit W_n, mit der das Teilchen in den n-ten angeregten Oszillatorzustand übergeht, wenn der Oszillator durch einen Gauß-förmigen Laserpuls angestoßen wird. Das elektrische Feld des Laserpulses kann als räumlich homogen betrachtet werden und habe folgende zeitliche Abhängigkeit,

$$E(t) = \frac{A}{\tau_0\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/\tau_0^2)\,. \tag{1}$$

Lösen Sie die auftretenden Integrale rein analytisch und geben Sie eine Abschätzung für die Gültigkeit der störungstheoretischen Approximation an.

3. Sudden Approximation

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem harmonischen Oszillator dessen Potential sich plötzlich verändert,

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + (1 + \Theta(t))\frac{m\omega^2}{2}x^2$$
$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Für $t < 0$ befindet sich das Teilchen im Grundzustand des harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz ω. Berechnen Sie die exakten Wahrscheinlichkeiten für $t > 0$, das Teilchen in den Zuständen $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ des harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\sqrt{2}\omega$ zu finden.
Hinweis: Die exakten Übergangswahrscheinlichkeiten werden durch Projektion auf die neuen (zeitunabhängigen) Zustände berechnet.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x^2 \rangle$ als Funktion der Zeit für alle Zeiten t.

4. Streuung am Delta-Potential

Betrachten Sie das eindimensionale Streuproblem am Deltapotential, das durch folgende Schrödingergleichung beschrieben wird,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{\hbar^2\kappa}{2m}\delta(x)\right]\psi = E\psi\,.$$

Im Vergleich zu Bsp. 3 des ersten Tutoriums soll hier der Fall einer abstoßenden Deltafunktion untersucht werden ($\kappa > 0$).

(a) Lösen Sie das Streuproblem unter Annahme einer von links einfallenden ebenen Welle mit Wellenzahl k.

(b) Zeigen Sie, dass sich Ihre Lösung in der folgenden Form schreiben lässt (wie in der Vorlesung besprochen):

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{ikx} + f(k)e^{ik|x|}\right]$$

Wie lautet im vorliegenden Fall die Streuamplitude $f(k)$?

(c) Zeigen Sie nun explizit, dass Sie zu demselben Ergebnis auch mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung gelangen können,

$$\psi_k(x) = \psi_k^0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G_0^+(k; x, x')U(x')\psi_k(x')\,.$$

Bestimmen Sie die eindimensionale Greensche Funktion mittels Fourier-Ansatz,

$$G_0^+(k; x, x') = G_0^+(k; x - x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, G_0^+(k; q)\, e^{iq(x-x')}\,.$$

Die Fourier-Transformierte $G_0^+(k; q)$ erhalten Sie durch Einsetzen des Fourier-Ansatzes in die Bestimmungsgleichung $(\Delta + k^2)G_0^+(k; x, x') = \delta(x - x')$. Verwenden Sie weiters dass gilt,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{ia}{\omega^2 - a^2 + i\varepsilon}\, e^{i\omega x}\right] = e^{ia|x|}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2014!!!

Zu kreuzen: 1,2,3,4