2. Übung, QT II, 31. 10. 2014

①

3) $\hat{H} = \frac{\vec{L}^2}{2I} + g_L \mu_B \vec{L} \cdot \vec{B}(t) \qquad l = 1$

$B(t) = (B_0, 0, B_0 f(t))$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\hbar/T} \cos(\omega t) & \text{falls } t \leq \hbar/T \\ \cos(\omega t) & \text{falls } t > \hbar/T \end{cases}$$

a) $\hat{H}_0 = g_L \mu_B \hat{L}_x B_0 = g_L \mu_B \frac{B_0}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-)$

Basis $|l, m_l\rangle$: $|1\,-1\rangle, |1\,0\rangle, |1\,1\rangle$

Matrixelemente $\langle l', m_l' | g_L \mu_B \frac{B_0}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-) | l, m_l\rangle$ berechnen

$\hat{L}_{\substack{+\\(-)}} |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, |l, m \pm 1\rangle$

$$\Rightarrow \hat{H}_0 = g_L \mu_B B_0 \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |1\,-1\rangle & |1\,0\rangle & |1\,1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eigenwerte E_n und Eigenvektoren berechnen:

Grundzustand $\rightarrow E_1 = -g_L \mu_B B_0 \hbar \qquad |E_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\,-1\rangle - \sqrt{2}|1\,0\rangle + |1\,1\rangle\right)$

1. angeregter Zustand $\rightarrow E_2 = 0 \qquad |E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|1\,-1\rangle + |1\,1\rangle\right)$

$E_3 = g_L \mu_B B_0 \hbar \qquad |E_3\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\,-1\rangle + \sqrt{2}|1\,0\rangle + |1\,1\rangle\right)$

b) $a_{fi}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle \psi_f | V(t') | \psi_i \rangle\, e^{i \underbrace{\frac{\varepsilon_f - \varepsilon_i}{\hbar}}_{\omega_{fi}} t'}$

$|\psi_f\rangle = |E_2\rangle, \; |\psi_i\rangle = |E_1\rangle \qquad \omega_{fi} = \overbrace{g_L \mu_B B_0}^{\alpha}$

$$a_{fi}^{(1)} = \frac{\overbrace{g_L \mu_B B_0}^{\alpha}}{i\hbar} \langle E_2 | \hat{L}_z | E_1 \rangle \Big\{ \underbrace{\int_0^{\hbar/T} dt' \frac{t'}{\hbar/T} \cos(\omega t')\, e^{i\alpha t'}}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\hbar/T}^{t} dt' \cos(\omega t')\, e^{i\alpha t'}}_{\text{II}} \Big\}$$

$$\langle E_2|\hat{L}_z|E_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\langle 11| - \langle 1\,{-1}|\right)\hat{L}_z\left(|1\,{-1}\rangle - \sqrt{2}\,|10\rangle + |11\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\hbar - (-\hbar)\right) = \frac{2\hbar}{2\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

I $$\int_0^{\hbar/T} dt'\,\frac{t'}{\hbar/T}\cos(\omega t')\,e^{i\alpha t'} = \int_0^{\hbar/T}\frac{T}{\hbar}\,dt'\,t'\,\frac{e^{i\omega t'}+e^{-i\omega t'}}{2}\,e^{i\alpha t'} =$$

$$= \frac{T}{2\hbar}\int_0^{\hbar/T} dt'\left(\underbrace{t'}_{u}\,\underbrace{e^{i(\alpha+\omega)t'}}_{dv} + t'\,e^{i(\alpha-\omega)t'}\right)$$

partielle Integration $u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$ liefert:

$$= \frac{T}{2\hbar}\left\{\frac{\hbar}{iT}\,\frac{e^{i(\alpha+\omega)\hbar/T}}{\alpha+\omega} + \frac{e^{i(\alpha+\omega)\hbar/T}}{(\alpha+\omega)^2} - \frac{1}{(\alpha+\omega)^2} + \text{dieselben Terme nochmal mit } (\alpha-\omega)\right\}$$

II $$\int_{\hbar/T}^{t} dt'\cos(\omega t')\,e^{i\alpha t'} = \frac{1}{2}\int_{\hbar/T}^{t} dt'\left(e^{i(\alpha+\omega)t'} + e^{i(\alpha-\omega)t'}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{i(\alpha+\omega)t}}{i(\alpha+\omega)} - \frac{e^{i(\alpha+\omega)\hbar/T}}{i(\alpha+\omega)} + \frac{e^{i(\alpha-\omega)t}}{i(\alpha-\omega)} - \frac{e^{i(\alpha-\omega)\hbar/T}}{i(\alpha-\omega)}\right\}$$

- Für Zeiten $t \leq \hbar/T$ trägt nur Integral I bei, für Zeiten $t > \hbar/T$ hingegen beide Integrale I und II
- gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_{fi} = |a_{fi}^{(n)}|^2$
- Fermis goldene Regel im Allgemeinen gültig für $t \to \infty$ und $\langle E_n|\hat{V}|E_m\rangle \ll |E_n - E_m|$; hier nicht gültig, da Störung nicht klein ist $\left(\langle E_2|\hat{V}|E_1\rangle = \frac{g_L\mu_B B_0}{\sqrt{2}},\ E_2 - E_1 = g_L\mu_B B_0\right)$

⇒ • 1. Ordnung Störungstheorie hier keine gute Näherung

c) <u>Sudden Approximation</u>: typische Zeitskala $e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta E t}$, $\Delta E = E_2 - E_1$

- Einschaltzeit $\hbar/T$ sehr klein $\hbar/T \ll \hbar/\Delta E \Rightarrow T \gg \Delta E$
- keine starken Fluktuationen während Einschaltvorgang: $\omega\cdot\frac{\hbar}{T} \ll 1$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|\psi(t=0)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}{2}\left(|1\,{-1}\rangle - \sqrt{2}\,|10\rangle + |11\rangle\right)$$

(setze $\omega = 0$)

wobei $$\hat{H} = g_L\mu_B B_0\left(\hat{L}_x + \hat{L}_z\right) =$$

$$= g_L\mu_B B_0\left\{\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{array}{c}|1\,{-1}\rangle\ |10\rangle\ |11\rangle \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array} + \begin{array}{c}|1\,{-1}\rangle\ |10\rangle\ |11\rangle \\ \begin{pmatrix}-\hbar&0&0\\0&0&0\\0&0&\hbar\end{pmatrix}\end{array}\right\} = g_L\mu_B B_0\,\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&0&1\\0&1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

gesuchte Wahrscheinlichkeit $P = |\langle E_2|\psi(t)\rangle|^2$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=1}^{3} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t}|\varepsilon_n\rangle\langle\varepsilon_n|\psi(t=0)\rangle$$

mit $\hat{H}|\varepsilon_n\rangle = \varepsilon_n|\varepsilon_n\rangle$

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\,-1\rangle - \sqrt{2}|1\,0\rangle + |1\,1\rangle\right)$$

Eigenwerte ε_n und Eigenvektoren $|\varepsilon_n\rangle$ berechnen:

$$\varepsilon_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}} g_2\mu_B B_0\hbar \quad |\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{24+16\sqrt{2}}}\left[(3+2\sqrt{2})|1\,-1\rangle - (2+\sqrt{2})|1\,0\rangle + |1\,1\rangle\right]$$

$$\varepsilon_2 = 0 \qquad |\varepsilon_2\rangle = \frac{1}{2}\left(-|1\,-1\rangle - \sqrt{2}|1\,0\rangle + |1\,1\rangle\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} g_2\mu_B B_0\hbar \quad |\varepsilon_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{24-16\sqrt{2}}}\left[(3-2\sqrt{2})|1\,-1\rangle + (2-\sqrt{2})|1\,0\rangle + |1\,1\rangle\right]$$

$$\langle\varepsilon_1|\psi(t=0)\rangle = \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{24+16\sqrt{2}}}$$

$$\langle\varepsilon_2|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle\varepsilon_3|\psi(t=0)\rangle = \frac{3}{\sqrt{24-16\sqrt{2}}}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\sqrt{2}\overbrace{g_2\mu_B B_0}^{\alpha}t}\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{24+16\sqrt{2}}}|\varepsilon_1\rangle + \frac{1}{2}|\varepsilon_2\rangle + e^{-i\sqrt{2}\alpha t}\frac{3}{\sqrt{24-16\sqrt{2}}}|\varepsilon_3\rangle$$

$$P = |\langle E_2|\psi(t)\rangle|^2$$

$$\langle E_2|\varepsilon_1\rangle = \frac{-2-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{24+16\sqrt{2}}} \qquad \langle E_2|\varepsilon_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle E_2|\varepsilon_3\rangle = \frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{24-16\sqrt{2}}}$$

$$\langle E_2|\psi(t)\rangle = e^{i\underbrace{\sqrt{2}\alpha}_{\beta}t}\frac{14+10\sqrt{2}}{\sqrt{2}(24+16\sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + e^{-i\sqrt{2}\alpha t}\frac{-6+6\sqrt{2}}{\sqrt{2}(24-16\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\beta t}\underbrace{\frac{14+10\sqrt{2}}{12+8\sqrt{2}}}_{a} + 1 + e^{-i\beta t}\underbrace{\frac{-6+6\sqrt{2}}{12-8\sqrt{2}}}_{b}\right)$$

$$P = |\langle E_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{8}\left\{(a+b)^2 + 1 + 2(a+b)\cos(\beta t) + 2ab\underbrace{(\cos^2\beta t - \sin^2\beta t)}_{\cos(2\beta t)}\right\}$$

d) adiabatische Approximation

- lange Einschaltzeit $\hbar/T \gg \hbar/\Delta E \Rightarrow T \ll \Delta E(t)$
- keine starken Oszillationen $\frac{2\pi}{\omega} \gg \frac{\hbar}{\Delta E(t)}$

$$t_A = \frac{\hbar}{2T} \quad , \quad \omega = 0$$

$$\hat{H} = H(t_A) = g_L \mu_B B_0 \left(\hat{L}_x + \frac{\hat{L}_z}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} g_L \mu_B B_0 \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ berechnen:

$$e_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}\alpha \qquad |e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{30+10\sqrt{5}}}\left((3+\sqrt{5})|1-1\rangle - (\sqrt{2}+\sqrt{10})|10\rangle + 2|11\rangle \right)$$

$$e_2 = 0 \qquad |e_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left(+|1-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + |11\rangle \right)$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}\alpha \qquad |e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{30-10\sqrt{5}}}\left((3-\sqrt{5})|1-1\rangle - (\sqrt{2}-\sqrt{10})|10\rangle + 2|11\rangle \right)$$

- adiabatische Näherung: System war vor Einschalten der Störung im Grundzustand → bleibt im Grundzustand, also hier in $|e_1\rangle$
- gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = |\langle E_2|e_1\rangle|^2 = \frac{1}{2(30+10\sqrt{5})}(-3-\sqrt{5}+2)^2 = \frac{(-1-\sqrt{5})^2}{2(30+10\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2(30+10\sqrt{5})} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2\cdot 10(3+\sqrt{5})} = \frac{1}{10}$$

4) Dichtematrix und verschränkte Zustände

$$\hat{H} = -\frac{g}{\hbar}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 \qquad \hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}(\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$$

a) $\hat{J} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$

$$\hat{J}^2 = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 = \hat{S}_1^2 + 2\hat{S}_1\hat{S}_2 + \hat{S}_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \hat{S}_1\hat{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{J}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2\right)$$

$s_1 = s_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Basis $|j\, m_j\rangle$: $|00\rangle, |1\,-1\rangle, |1\,0\rangle, |1\,1\rangle$

Berechnung der Matrixelemente $\langle j' m_j' | \hat{S}_1 \hat{S}_2 | j\, m_j\rangle$:

$$\hat{S}_1\hat{S}_2 |j\, m_j\rangle = \frac{1}{2}(\hat{J}^2 \underbrace{- \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2}_{-\frac{3}{2}\hbar^2})|j\, m_j\rangle$$

da $\hat{S}_{1(2)}^2 |j\, m_j\, s_1 s_2\rangle = \hbar^2 \underbrace{s_{1(2)}(s_{1(2)}+1)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{4}} |j\, m_j\, s_1 s_2\rangle$

$$= \frac{1}{2}\left(\hbar^2 \underbrace{(j+1)j}_{\substack{=0 \text{ für } j=0 \\ =2 \text{ für } j=1}} - \frac{3}{2}\hbar^2\right)|j\, m_j\rangle$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} |00\rangle & |1\,-1\rangle & |1\,0\rangle & |1\,1\rangle \end{array} \\ \hat{H} = -g\frac{\hbar}{4} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 = |\uparrow\downarrow\rangle$

$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi(t=0)\rangle$

z.B. aus Clebsch-Gordan Tabelle:

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle + |00\rangle)$$
$$|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle - |00\rangle)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle + |00\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{igt/4}|1\,0\rangle + e^{-i3gt/4}|00\rangle\right)$$

c) $$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{igt/4}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + e^{-i3gt/4}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(e^{igt/4} + e^{-i3gt/4}\right)}_{I}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + \underbrace{\left(e^{igt/4} - e^{-i3gt/4}\right)}_{II}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right]$$

lässt sich nur als $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2$ schreiben wenn I oder II verschwindet

I $\quad e^{igt/4} + e^{-i3gt/4} = 0$

$$\cos gt/4 + i\sin \overset{x}{\widetilde{gt/4}} + \cos 3gt/4 - i\sin gt/4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \cos x + \cos(3x) = 0 \\ 2. & \sin x - \sin(3x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Lösung z. B. graphisch:} \\ \Longrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}\end{array}$$

II $\quad e^{igt/4} - e^{-i3gt/4} = 0$

$$\cos gt/4 + i\sin gt/4 - \cos 3gt/4 + i\sin gt/4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \cos x - \cos 3x = 0 \\ 2. & \sin x + \sin 3x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 2n\frac{\pi}{4}$$

$$\text{I} \vee \text{II} \Longrightarrow x = \frac{gt}{4} = n\frac{\pi}{4} \Longrightarrow t = \frac{n\pi}{g} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Für $t = n\cdot\frac{\pi}{g}$ ist der Zustand $|\psi(t)\rangle$ nicht verschränkt

d) $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{igt/4}|10\rangle + e^{-i3gt/4}|00\rangle\right)\left(e^{-igt/4}\langle 10| + e^{igt\frac{3}{4}}\langle 00|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|10\rangle\langle 10| + e^{-igt}|00\rangle\langle 10| + e^{igt}|10\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 00|\right.$$

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |00\rangle & |1\text{-}1\rangle & |10\rangle & |11\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-igt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{igt} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

e) Diagonalelemente:

$$\bar{\rho}_{11} = \bar{\rho}_{33} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T dt = 1$$

Außerdiagonalelemente:

$$\bar{\rho}_{31} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{igt} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{e^{igT}}{ig} - \frac{1}{ig}\right) =$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{\cos gT + i\sin gT}{Tig} - \frac{1}{igT}\right) = 0 = \bar{\rho}_{13}$$

Außerdiagonalelemente verschwinden. War zu erwarten, da $\hat{\rho}$ in Eigenbasis von $\hat{H}$ dargestellt wurde.

f) $\hat{\rho}(t)$ in $\{|\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\rangle\}$ Basis umrechnen:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left\{\left(e^{igt/4} + e^{-3igt/4}\right)|\uparrow\downarrow\rangle + \left(e^{igt/4} - e^{-3igt/4}\right)|\downarrow\uparrow\rangle\right\}$$

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| =$$
$$= \frac{1}{4}\Big\{(2+2\cos(gt))\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + (2-2\cos(gt))\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| +$$
$$+ 2i\sin(gt)\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - 2i\sin(gt)\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|\Big\}$$

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |\downarrow\downarrow\rangle & |\uparrow\downarrow\rangle & |\downarrow\uparrow\rangle & |\uparrow\uparrow\rangle \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\cos(gt) & i\sin(gt) & 0 \\ \hline 0 & -i\sin(gt) & 1-\cos(gt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_1(t) = {}_2\langle\downarrow|\hat{\rho}(t)|\downarrow\rangle_2 + {}_2\langle\uparrow|\hat{\rho}(t)|\uparrow\rangle_2$

$$\hat{\rho}_1(t) = \frac{1}{2}\left((1+\cos(gt))\,|\uparrow\rangle_1\,{}_1\langle\uparrow| + (1-\cos(gt))\,|\downarrow\rangle_1\,{}_1\langle\downarrow|\right)$$

$$\hat{\rho}_1(t) = \frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} |\uparrow\rangle_1 & |\downarrow\rangle_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1+\cos(gt) & 0 \\ 0 & 1-\cos(gt) \end{pmatrix} \end{array}$$

g) • Die Dichtematrix des Gesamtsystems aus d) entspricht immer einem reinen Zustand, da wir ja von Anfang an von einem reinen Zustand des Gesamtsystems ausgegangen sind.

• reiner Zustand: $\mathrm{Tr}(\rho^2) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1$

• reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_1(t)$

$$\hat{\rho}_1^2(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+\cos(gt))^2 & 0 \\ 0 & (1-\cos(gt))^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1^2(t)) = \frac{1}{4}\left(1 + \cancel{2\cos(gt)} + \cos^2(gt) + 1 - \cancel{2\cos(gt)} + \cos^2(gt)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2 gt\right) \Longrightarrow \cos^2(gt) = 1$$
$$\cos(gt) = \pm 1$$
$$gt = n\pi \Longrightarrow \boxed{t = \frac{n\pi}{g}}$$

$\Longrightarrow$ Zu den Zeiten $t = \frac{n\pi}{g}$, zu denen das Gesamtsystem ~~einen~~ aus einem nicht verschränkten Zustand ~~hat~~ besteht, besteht das Teilsystem 1 aus einem reinen Zustand

Verschränkung im Gesamtsystem führt zu gemischtem Zustand im Teilsystem