

1. Plenum zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

PLENUM: Donnerstag, 16.10.2014

Lösung.

Zeitabhängige Störungstheorie: Magnetische Spinresonanz

a)

$$H = -\gamma(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_r)\mathbf{S} = -B_z \underbrace{g_s \mu_B \frac{\hbar}{2}}_C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - g_s \mu_B B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \underbrace{-CB_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{H_0} \underbrace{-CB \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}}_{V(t)}$$

b)

$$a_{\downarrow\uparrow}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle \downarrow | V(t') | \uparrow \rangle e^{i\omega_f t'} = i \frac{CB}{\hbar} \frac{\sin\left(\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2} t\right)}{\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2}} e^{i\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2} t}$$

$$P_{\downarrow}^{(1)}(t) = \frac{(CB)^2 \sin^2\left(\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2} t\right)}{\hbar^2 \left(\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2}\right)^2}$$

c) Die Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild lautet:

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = V_I(t)|\Psi(t)\rangle.$$

Man kann nun einen beliebigen Zustandsvektor des Systems nach Eigenfunktionen von H_0 entwickeln, wobei die Entwicklungskoeffizienten zeitabhängig sind:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \sum_{n=\downarrow,\uparrow} c_n(t)|n\rangle.$$

Setzt man dies in die Schrödingergleichung ein, geht ins Schrödingerbild zurück und projiziert, unter Ausnutzung der Orthonormalität der Eigenfunktionen von H_0 die Entwicklungskoeffizienten heraus, so erhält man:

$$i\hbar\partial_t c_m(t) = \sum_{n=\downarrow,\uparrow} \exp\left(i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t\right) \langle m|V|n\rangle c_n(t) = \sum_{n=\downarrow,\uparrow} \exp(i\omega_{mn}t) V_{mn}c_n(t).$$

Einsetzen der Matrixelemente liefert 2 gekoppelte Differentialgleichungen für die beiden Koeffizienten:

$$i\hbar\partial_t c_\downarrow(t) = -CB e^{i(\omega+\omega_{\downarrow\uparrow})t} c_\uparrow(t)$$

$$i\hbar\partial_t c_\uparrow(t) = -CB e^{-i(\omega+\omega_{\downarrow\uparrow})t} c_\downarrow(t).$$

Löst man dieses Gleichungssystem und verwendet die Anfangsbedingung, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ befindet ($c_\downarrow(0) = 0$, $c_\uparrow(0) = 1$), so ergibt sich für den gesuchten Koeffizienten:

$$c_\downarrow(t) = \frac{CB}{\hbar} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} e^{i\frac{\omega+\omega_{\downarrow\uparrow}}{2}t} \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{4(CB)^2 + \hbar^2(\omega + \omega_{\downarrow\uparrow})^2}$$

und somit

$$P_\downarrow(t) = \frac{(CB)^2 \sin^2(\Omega t)}{\hbar^2 \Omega^2}.$$

d) Lösung siehe Folien

1. Plenum - Zeitabhängige Störungstheorie

Magnetische Spinresonanz

Dipl.-Ing. Thomas Schäfer

16. Oktober 2014

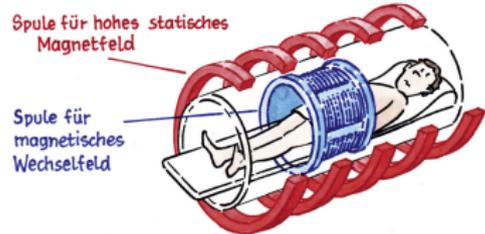
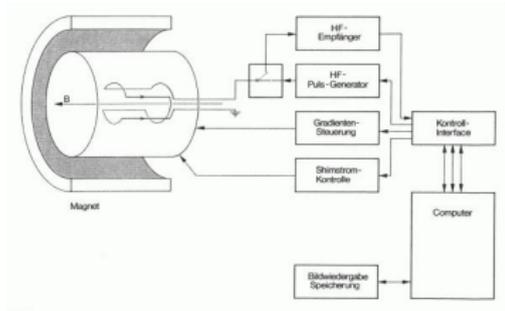
Grundbegriffe der zeitabhängigen Störungstheorie

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{zeitunabhängig}} + \underbrace{V(t)}_{\text{zeitabhängig}}$$

- ▶ Anfangszustand (initial state) $|\Psi_i\rangle$
- ▶ Endzustand (final state) $|\Psi_f\rangle$
- ▶ Übergangsamplitude $a_{fi}(t)$
- ▶ Übergangswahrscheinlichkeit $P_{fi} = |a_{fi}|^2$
- ▶ 1. Ordnung Störungstheorie ($|\Psi_i\rangle \neq |\Psi_f\rangle$)

$$a_{fi}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle \Psi_f | V(t') | \Psi_i \rangle e^{i\omega_{fi}t'}$$

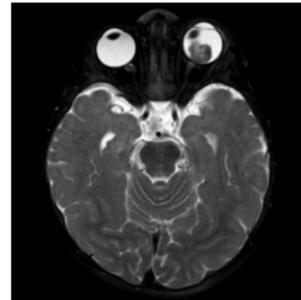
Kernspintomographie



© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG | Big Bang 8 

E. Zeitler: Kernspintomographie

T1-Relaxation:
stark abhängig von
Wärmeleitfähigkeit
⇒ Gewebeart



MRT-Aufnahme, <http://pictures.doccheck.com/>



Vergleich Störungstheorie - exakte Lösung

- ▶ exakte Lösung

$$P_{\downarrow}(t) = \frac{(CB)^2 \sin^2(\Omega t)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

$$\text{mit } \Omega = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{4(CB)^2 + \hbar^2(\omega + \omega_{\downarrow\uparrow})^2} \quad \text{und} \quad C = g_s \mu_B \frac{\hbar}{2}$$

- ▶ erste Ordnung Störungstheorie

$$P_{\downarrow}^{(1)}(t) = \frac{(CB)^2 \sin^2\left(\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2} t\right)}{\hbar^2 \left(\frac{\omega + \omega_{\downarrow\uparrow}}{2}\right)^2}$$

Vergleich Störungstheorie - exakte Lösung

