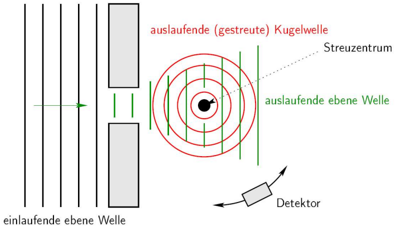
2. Plenum - Streutheorie und Bornsche Näherung

Dipl.-Ing. Thomas Schäfer

6. November 2014

Streutheorie - Fenster zum Experiment



- Asymptotik:

$$\Psi^{+}_{\vec{k}}(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\to} \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

- elastische Streuung
  - differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) = |f(\theta,\phi)|^2$
  - totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$

Lippmann-Schwinger-Gleichung und Bornsche Reihe

- Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$|\Psi_{\vec{k}}^{+}\rangle = |\vec{k}\rangle + G^{+}(\vec{k})U|\Psi_{\vec{k}}^{+}\rangle \quad \text{mit } U = \frac{2m}{\hbar^2}V$$

$$|\Psi_{\vec{k}}^{+}\rangle = \left[1 - G^{+}(\vec{k})U\right]^{-1}|\vec{k}\rangle$$

- Bornsche Reihe

$$|\Psi_{\vec{k}}^{+}\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[G^{+}(\vec{k})U\right]^{n}\right)|\vec{k}\rangle$$

- Streuamplitude

$$\boxed{f(\theta,\phi) = -2\pi^2\sum_{n=0}^{\infty}\langle\vec{k}'|U\left[G^{+}U\right]^{n}|\vec{k}\rangle \overset{\text{1.B.N.}}{=} -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\vec{k}'|V|\vec{k}\rangle}$$

Erste Bornsche Näherung in Ortsdarstellung

- Erste Bornsche Näherung

$$\Psi^+_{\vec{k}}(\vec{r}) = \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3r' \, G^+(\vec{k};\vec{r},\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\phi_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$$

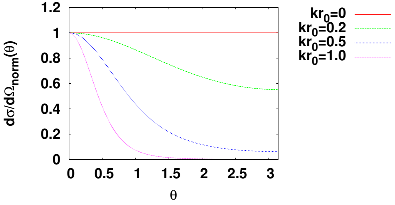
- Ortsdarstellung der Greenschen Funktion

$$G^+(\vec{k};\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\boxed{\Psi^+_{\vec{k}}(\vec{r}) = \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \, \frac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}V(\vec{r}\,')\phi_{\vec{k}}(\vec{r}\,')}$$

Rotationssymmetrisches Potential

- $V(r) = V_0 e^{-\frac{r}{r_0}}$
- $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)\Big|_{1.B.N.} = \left(\frac{4mV_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{(1+4(kr_0)^2 \sin(\theta/2)^2)^4}$



- $\sigma\Big|_{1.B.N.} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2mV_0 r_0^3}{\hbar^2 k r_0}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{(1+4r_0^2 k^2)^3}\right]$

2. Plenum: „Bornsche Nährung"

a) Ausführung der Integrationen gibt:

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\,\frac{V(r)}{r}\,e^{i(kr+\vec{k}\cdot\vec{r})} = \frac{m}{\hbar^2\,\cancel{2\pi}}\int_0^{+\infty} dr\, r V(r)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=} \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)}; \qquad \vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$$

$$= \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)} = -\frac{m}{\hbar^2}\int_0^{\infty} dr\, rV(r)\int_1^{-1} dy\; e^{ikr(1+y)}$$

$$= \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\; r\,V(r)\; e^{ikr}\,\frac{e^{ikry}}{ikr}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{m}{i\hbar^2 k}\int_0^{+\infty} dr\, V(r)\,.\,\left(e^{2ikr}-1\right)$$

In unserem Fall $V(r) = V_0 e^{-r/r_0}$ $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}\,\dfrac{r_0^2}{1-2ikr_0}\right|$

Deswegen $\left|\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}\,\dfrac{r_0^2}{1-2ikr_0}\right| \ll 1$

d.h. $\left|2\,\dfrac{mr_0^2V_0}{\hbar^2}\,\dfrac{1+2ikr_0}{1+4k^2r_0^2}\right| = 2\,\dfrac{mr_0^2V_0}{\hbar^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+4r_0^2k^2}} \ll 1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\hbar^2/2}{mr_0^2V_0} \gg \frac{1}{\sqrt{1+4k^2r_0^2}}}$$

Bemerkungen: hier ist $\dfrac{\hbar^2}{2mr_0^2V_0}$ ein dimensionsloses Maß für die Stärke und die Reichweite des Potentials $V(r)$; die Energieabhängigkeit steckt im Produkt kr_0 oder Funktion auf der rechten Seite. Diese Funktion von kr_0 fällt monoton ab und verschwindet für $kr_0 \to +\infty$

Deswegen: Bornsche Nährung ANWENDBAR
- auch bei kleinen Energien für genügend schwaches bzw kurzreichweitiges Potential
- auf jeden Fall aber bei genügend hoher Energie

b) Die Streuamplitude in erster Bornschen Näherung lässt sich schreiben als

$$f_{Born}(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, V(\vec{r})\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\vec{q}) ,$$

wobei $|\vec{q}| = q = |\vec{k}' - \vec{k}| = 2k\sin\theta/2$

Für Zentralepotentiale (wie in unserem Fall) ist

$$\tilde{V}(q) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{(2\pi)} \int_0^{+\infty} dr\, r^2 V(r) \int_0^{\pi} d\tilde{\theta}\, \sin\tilde{\theta}\, e^{-iqr\cos\tilde{\theta}} = \frac{4\pi}{q}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\sin(qr)$$

Mit dem expliziten Ausdruck unseres Potentials, bekommen wir

$$\tilde{V}(q) = V_0 \frac{4\pi}{q^3}\int_0^{+\infty} dy\, y\sin y\, e^{-y/qr_0} = V_0\, 4\pi r_0^3 \times \frac{2}{[1+(q r_0)^2]^2}$$

[Hinweis für das Integral $\int_0^{+\infty} dy \underbrace{y}_{A(y)} \underbrace{\sin y\, e^{-y/q_0 r_0}}_{B'(y)} = \cancel{A(y)B(y)}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{A'(y)}_{1} B(y)\, dy$.

Deswegen bekommen wir

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Born} = |f(\theta,\cancel{\phi})|^2 = \left(\frac{2m V_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \times \frac{4}{[1+(q r_0)^2]^4}$$

nicht ϕ-abhängig!

Zur Berechnung des totalen Streuquerschnitts integriere gemäß

$q^2 = 2k^2(1-\cos\theta) \Rightarrow q\,dq = -k^2\, d(\cos\theta)$. Deswegen $\int d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)$.

$$= \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k} q\,dq \cdots = \frac{2\pi}{k^2 r_0^2}\int_0^{2kr_0} x\,dx \qquad \text{wobei } x \equiv q r_0$$

Das Integral lässt sich schreiben als

$$\sigma_{TOT}\Big|_{Born} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Born} = \frac{2\pi}{r_0^2 k^2} \int_0^{2kr_0} dx \left(\frac{2m V_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4x}{(1+x^2)^4} = 2\pi \left(\frac{2m V_0 r_0^2}{\hbar^2}\right)^2 \int_0^{2kr_0} \frac{4x}{(1+x^2)^4}$$

$$= 2\pi \left(\frac{2m V_0 r_0^2}{\hbar^2 k}\right) \times \frac{2}{3} \frac{x^2 (3 + 3x^2 + x^4)}{(1+x^2)^3} \Bigg|_{x = 2kr_0}$$