QM II 2014 WS 3. Plenum - Musterlösung

Hinweis zu Strom- u. Ladungsdichte in der Dirac-Gleichung:

- **Ladungsdichte**: $\rho(\vec{r},t) = e \cdot \psi^+(\vec{r},t) \cdot \psi(\vec{r},t)$

$\Rightarrow$ Die Stromdichte kann nun durch die Kontinuitätsglg. abgeleitet werden. $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = e\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^+(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t) + e\,\psi^+(\vec{r},t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)\right)$$

Dirac-Glg.: $\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{i\hbar}\left(c\cdot\vec{\alpha}\,\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi(\vec{r},t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^+(\vec{r},t) = \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{c\hbar}{i}\left(\vec{\nabla}\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)\right)^+ - \beta mc^2\psi(\vec{r},t)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -e\cdot c\cdot\left(\psi^+(\vec{r},t)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{r},t) + (\vec{\nabla}\psi^+(\vec{r},t))\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\Big[\underbrace{e\cdot c\;\psi^+(\vec{r},t)\,\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)}_{\vec{j}(\vec{r},t)}\Big]$$

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r},t) = e\cdot c\cdot\psi^+(\vec{r},t)\,\vec{\alpha}\,\psi(\vec{r},t)}$$

7. a) $$\psi_I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\cdot\left[A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{cp}{mc^2+E_p}\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}px} + B'\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{-cp}{mc^2+E_p}\\0\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}px} + B\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{-cp}{mc^2+E_p}\end{pmatrix}\right]$$

wobei $\boxed{E_p = \sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}$

(b)

1) $E_p \geq V + mc^2$

$$\psi_{II}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_q}} \left[C' e^{iqx} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{cq}{mc^2+E_q} \\ 0 \end{pmatrix} + C e^{iqx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{cq}{mc^2+E_q} \end{pmatrix} \right]$$

$$E_q = \sqrt{c^2 q^2 + m^2 c^4} \qquad E_q = E_p - V > mc^2$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{(E_p - V)^2}{c^2} - m^2 c^2}$$

Stetigkeitsbedingung an der Schwelle: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

- $B' = C' = 0 \Rightarrow$ Der Spin bleibt erhalten!
- $\sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_p}}\,(A + B) = \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_q}}\, C$

  $\sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_p}}\, \frac{cp}{mc^2 + E_p}(A - B) = \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_q}}\, \frac{cq}{mc^2 + E_q} \cdot C$

A dient nur zur Normierung der Gesamtwelle $\Rightarrow$ interessant sind $\frac{B}{A}$ u. $\frac{C}{A}$

Dividieren der beiden Glg. liefert:

$$\frac{A - B}{A + B} = \frac{1 - \frac{B}{A}}{1 + \frac{B}{A}} = \boxed{\frac{mc^2 + E_p}{mc^2 + E_q}\, \frac{q}{p} =: \rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

Extremfälle für ρ

- $E_p = V + mc^2 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow \rho = 0$
- $E_p \to \infty$ (d.h. $E_p \gg V$)

  $p \approx q$ u. $E_p \approx E_q \Rightarrow \rho = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{0 \leq \rho \leq 1}$

Aus der ersten Gleichung kann man nun $\frac{C}{A}$ berechnen:

$$1 + \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{1 + \frac{mc^2}{E_q}}{1 + \frac{mc^2}{E_p}}}\, \frac{C}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{mc^2 + E_q}{mc^2 + E_p}} \cdot \sqrt{\frac{E_p}{E_q}}\, \frac{C}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{mc^2 + E_q}{mc^2 + E_p}\, \frac{\cancel{p}\, q}{\cancel{p}\, p}}\, \sqrt{\frac{E_p\, q}{E_q\, q\, p}}\, \frac{C}{A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{E_p\, q}{E_q\, p}}\, \frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2}{1+\rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{E_p q}{p E_q}} \frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E_p q}{E_q p}} \frac{C}{A} = \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}$$

Berechnung von <u>Transmissions-</u> u. <u>Reflexionskoeffizient</u>.

$$T = \left| \frac{j_{Trans}}{j_{In}} \right| , \qquad R = \left| \frac{j_{Refl}}{j_{In}} \right|$$

$$(e = 1) \qquad j_x(x) = c\, \psi^+(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi(x)$$

$$\Rightarrow j_x = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_p}\right)\left[A^2 \frac{cp}{mc^2+E_p} - B^2 \frac{cp}{mc^2+E_p}\right] + \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_q}\right) \frac{cq}{mc^2+E_q} C^2$$

$$= \underset{(A)}{j_{In}} + \underset{(B)}{j_{Refl}} + \underset{(C)}{j_{Trans}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j_{In} = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_p}\right) \frac{cp}{mc^2+E_p} A^2 \\ j_{Refl} = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_p}\right) \frac{cp}{mc^2+E_p} B^2 \\ j_{Trans} = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{mc^2}{E_q}\right) \frac{cq}{mc^2+E_q} C^2 \end{cases}$$

$$\boxed{R =} \left| \frac{j_{Refl}}{j_{In}} \right| = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \boxed{\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}$$

$$\boxed{T =} \left| \frac{j_{Trans}}{j_{In}} \right| = \frac{q}{E_q} \cdot \frac{E_p}{p} \left(\frac{C}{A}\right)^2 \boxed{= \frac{4\rho}{(1+\rho)^2}}$$

$$(T + R = 1 \checkmark)$$

$\rightarrow$ Da $0 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow 0 \leq R, T \leq 1$

$\rightarrow$ Extremfälle: $\circ\ E_p = V + mc^2 \Rightarrow \rho = 0, \quad R = 1, \quad T = 0$

$\circ\ E_p \to \infty \ (E_p \gg V) \quad \rho = 1, \quad R = 0, \quad T = 1$

2.) $V + mc^2 > E_p > V$

Die Rechnung geht genauso wie für $E_p > V + mc^2$, der einzige Unterschied ist nun, dass q imaginär wird:

$$q = \overset{+}{(-)} i \sqrt{\underbrace{m^2c^2 - \left(\frac{E_p - V}{c}\right)^2}_{>0}}$$

(+ Vorzeichen, da $e^{\frac{i}{\hbar} qx}$ für $x>0$ exponentiell gedämpft werden soll)

Da q nun imaginär ist wird auch ρ imaginär

$\Rightarrow \quad \rho \rightarrow i\bar{\rho}$ mit reellem $\bar{\rho}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \left|\frac{1 - i\bar{\rho}}{1 + i\bar{\rho}}\right|^2 = 1} \quad \forall\, \bar{\rho} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Das Elektron wird vollständig an der Barriere reflektiert.

(T macht hier keinen Sinn mehr, da es innerhalb der Barriere, d.h. für $x > 0$, nur mehr eine exponentiell abfallende, aber keine propagierende Lösung mehr gibt.)

3.) $V - mc^2 > E_p \; (> mc^2)$

Da nun $E_p - V < -mc^2 < 0$ ist muss ich für diesen Fall im Bereich II eine Lösung der freien Dirac-Gleichung mit negativer Energie ansetzen.
Da gesamt eine positive Energie von $x = -\infty$ nach $x = +\infty$ fließen soll, muss die entsprechende negative Energie von rechts nach links fließen

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{i}{\hbar}qx} \quad (q>0) \Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}(Et+qx)} = e^{+\frac{i}{\hbar}E_q t - \frac{i}{\hbar}qx}$$

$E = -E_q$

$\Downarrow$

in $+x$-Richtung voranschreitende Welle mit Energie $(+)E_q$

Der Ansatz für $\psi_{II}(x)$ lässt sich schreiben:

$$\psi_{II}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\left[C' e^{-\frac{i}{\hbar}qx}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cq}{mc^2+E_q} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C\, e^{-\frac{i}{\hbar}qx}\begin{pmatrix} \frac{cq}{mc^2+E_q} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ folgt:

- $C' = 0$

$$\boxed{q = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{V-E_p}{c}\right)^2}_{>m^2c^2} - m^2c^2} \rightarrow \boxed{q \text{ ist reell!}}}$$

$$\left(E_q = +\sqrt{q^2c^2+m^2c^4}\right)$$

- $$\left.\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,(A+B) &= \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\,\frac{cq}{mc^2+E_q}\,C \\ \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_p}}\,\frac{cp}{mc^2+E_p}\,(A-B) &= \sqrt{1+\frac{mc^2}{E_q}}\,C \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A-B}{A+B} = \frac{(mc^2+E_p)(mc^2+E_q)}{c^2\,p\,q} = \frac{1-\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{mc^2+E_p}{cp}\;\frac{mc^2+E_q}{cq}} \quad (>1)$$

- Spezialfall: $\rightarrow E_p = V - mc^2 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow \rho = \infty$

$\rightarrow$ ~~$E_p \ll V - mc^2$~~

$\Rightarrow \boxed{1 < \rho < \infty}$

$$\boxed{\frac{B}{A} = \frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

Für $\frac{C}{A}$ folgt aus der ersten Gleichung:

$$\left(1+\frac{B}{A}\right) = \sqrt{\frac{1}{mc^2+E_p}\cdot\frac{1}{mc^2+E_q}}\;\sqrt{\frac{E_p}{E_q}}\;cq\;\frac{C}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\rho}}\;\sqrt{\frac{qE_p}{pE_q}}\;\frac{C}{A} = 1+\frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2}{1+\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C}{A}\cdot\sqrt{\frac{qE_q}{pE_q}} = \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}}$$

Genauso wie für $E_p > V+mc^2$ ergibt sich daher für R u. T:

$$R = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 \qquad T = \frac{4\rho}{(1+\sqrt{\rho})^2}$$

Hier gilt allerdings: wenn $E_p = V-mc^2$, d.h., E_p sehr nah bei der Schwelle ist:

$$\rho = \infty \Rightarrow R = 1, \quad T = 0$$

<u>Paradoxie</u>: Je stärker man die Energie absenkt ($E_p \ll V-mc^2$, aber $> mc^2$) desto höher wird die Transmission

$\boxed{\text{Spin}}$: Interessant ist, dass ich in diesem Fall einen $\downarrow$-Spinor für die negative Energie nehmen muss