Technische Universität
Wien

Ass.-Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

1. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

Test A **Name:** **Matrikelnummer:**

A1	A2	A3	A4	Σ
15	11+5*	14	10	50+5*

1. Methoden für zeitabhängige Probleme

3+7+5=15 Punkte

Der Hamiltonoperator eines fixierten Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens im Magnetfeld lautet:

$$H = g_S \mu_B \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(t), \quad g_S, \mu_B \in \mathbb{R}^+$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind und $\vec{B}(t) = (B_x \theta(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), 0, B_z)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Grundzustand.
Hinweis: Pauli-Matrizen $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

a) Wie müssen (ohne Beweis) B_x, B_z und τ zueinander in Beziehung stehen, um dieses Problem i) in Sudden Approximation bzw. (ii) in adiabatischer Näherung behandeln zu können?

b) Berechnen Sie für einen beliebigen Zeitpunkt $t \gg \tau$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden, in der Sudden Approximation für $B_z = 4B_0$ und $B_x = 3B_0$.

c) Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t^* = \tau \ln 3$ die Energie des Teilchens in adiabatischer Nährung für $B_z = 4B_0$ und $B_x = 3B_0$.

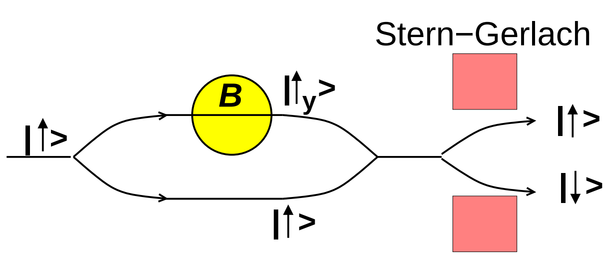
2. Reduzierte Dichtematrix

2+5+4+3+2=11+5* Punkte*

[Alle Teilaufgaben können auch unabhängig bearbeitet werden]

a) Berechnen Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ eines in y-Richtung polarisierten Spins $|\uparrow_y\rangle$ als Matrix in den S_z-Eigenfunktionen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Zeigen Sie durch eine Spur in S_z-Basis, dass $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand beschreibt.

Ein in z-Richtung polarisierter Teilchenstrahl $|\uparrow\rangle$ wird nun durch einen Strahlteiler in zwei Teilstrahlen geteilt. Einer der Teilstrahlen durchläuft ein Magnetfeld $\vec{B}$ mit $H = g_S \mu_B \vec{B}\vec{S}$.



b)* Welche Zeit muss ein Magnetfeld auf einen Spin $|\uparrow\rangle$ wirken, damit dieser im Anschluss als $|\uparrow_y\rangle$ ausgerichtet ist? In welche Richtung muss das Magnetfeld zeigen?

Die in der Skizze im Stern-Gerlach-Apparat ankommende Wellenfunktion sei

$$|\Psi\rangle = |k\rangle|\uparrow\rangle/\sqrt{2} + |k'\rangle[|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle]/2\ ; \tag{1}$$

$k' \neq k$ beschreibt zusätzliche inelastische Streuung.

c) Berechnen Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ des quantenmechanischen Systems Glg. (1).

d) Berechnen Sie den auf den Spin-Raum reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_{\text{spin}}$ (*Der Hilbertraum ist der Produktraum aus Orts- und Spin-Komponente*). Beschreibt $\hat{\rho}_{\text{spin}}$ einen reinen Zustand?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich welches Messergebnis für die S_z-Messung?

3. Theorieaufgaben

3+3+5+3=14 Punkte

a) Elektronen mit Wellenvektor $k = \pi/a$ streuen im Festkörper an einer Fehlstelle mit abgeschirmtem Coulomb-Potential $V(r) = V_0 e^{-r/\lambda_{\text{TF}}}/r$. Hierbei ist a die Gitterkonstante und $\lambda_{\text{TF}} = 2a$ die Thomas-Fermi-Abschirmlänge. Schätzen Sie ab, bis zu welchem Drehimpuls l Sie Partialwellen bei der Streuung berücksichtigen müssen.

b) Für ein Spin S-System haben wir den Hilbertraum $H = \mathbb{C}^N$ mit $N = 2S + 1$. Von wie vielen unabhängigen, reellen Parametern hängt eine allgemeine Dichtematrix für einen Spin S ab?

c) Sei $H(t) = H_0 + V(t)$ der Hamiltonoperator eines Dreiniveausystems, wobei $H_0 = \epsilon|1\rangle\langle 1| + 2\epsilon|2\rangle\langle 2| + 10\epsilon|3\rangle\langle 3|$ und $V(t) = V\,\theta(t)\cos(\omega t)\,(|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$ (ϵ, V, ω reell und positiv). Das System befindet sich bei $t = 0$ im Grundzustand von H_0. (i) Welche Übergänge zu den angeregten Zuständen von H_0 sind in erster Ordung Störungstheorie möglich für $t > 0$? (ii) Berechnen Sie die Übergangsrate mit Fermis Goldener Regel. (iii) Schätzen Sie das *Zeitintervall* ab, in welchem die Bedingung für Fermis Goldene Regel erfüllt ist.

d) Sei $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ein eindimensionaler Hamiltonoperator. Geben Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für die Zeitableitung des Impulsoperators $p_H(t)$ und die entsprechende klassische Hamiltongleichung für den klassischen Impuls p_{kl} an. Für welches der Potentiale (i) $V(x) = konst.$; (ii) $V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + Cx^4$; (iii) $V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + Ax$; (iv) $V(x) = \frac{1}{2}Bx^3 + Cx^4$ (K, A, B, C reelle positive Konstanten) zeigen die quantenmechanischen Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$ und $\langle p\rangle(t)$ die gleiche Dynamik wie die klassischen Variabeln $x_{kl}(t)$ und $p_{kl}(t)$?

4. Bragg-Streuung

6+4=10 Punkte

Betrachten Sie folgendes Potential für die Streuung von Elektronen an einem 1-dimensionalen Gitter im $\mathbb{R}^3$:

$$V(\mathbf{r}) = V_0 d^3 \sum_{n=-N}^{+N} \delta(x - nd)\delta(y)\delta(z), \qquad V_0, d \in \mathbb{R}^+,\ N \in \mathbb{N}^+$$

a) Berechnen Sie in erster Bornscher Näherung die Streuamplitude $f(\vec{q})$ zunächst als Funktion des Impulsübertrags $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k'}$ an, wobei $\vec{k'}$ in Richtung des Detektors zeigt und $|\vec{k'}| = |\vec{k}| = k$.

b) Geben Sie nun unter der Annahme $\vec{k} = (0, 0, k)$ die Streuamplitude auch als Funktion der Raumwinkel θ und ϕ an. Für welche Winkel θ wird der differentielle Streuquerschnitt maximal, wenn man nur Streuung in der xz-Ebene, d.h. $\phi = 0$ betrachtet?

[Hinweise: Ein Lösunganssatz verwendet $\sum_{i=0}^{N} a^i = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ und de l'Hospital].

Viel Erfolg!

Technische Universität Wien

Ass.-Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

1. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

Test B **Name:** **Matrikelnummer:**

B1	B2	B3	B4	Σ
14	10	15	11+5*	50+5*

1. Theoriefragen

3+5+3+3=14 Punkte

a) Elektronen mit Wellenvektor $k = \pi/2a$ streuen im Festkörper an einer Fehlstelle mit abgeschirmtem Coulomb-Potential $V(r) = V_0 e^{-r/\lambda_{\mathrm{TF}}}/r$. Hierbei ist a die Gitterkonstante und $\lambda_{\mathrm{TF}} = 2a$ die Thomas-Fermi-Abschirmlänge. Schätzen Sie ab, bis zu welchem Drehimpuls l Sie Partialwellen bei der Streuung berücksichtigen müssen.

b) Sei $H(t) = H_0 + V(t)$ der Hamiltonoperator eines Dreiniveausystems, wobei $H_0 = \epsilon_0|1\rangle\langle 1| + 2\epsilon_0|2\rangle\langle 2| + 9\epsilon_0|3\rangle\langle 3|$ und $V(t) = \mathcal{V}\,\theta(t)\cos(\omega t)\,(|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$ ($\epsilon_0, \mathcal{V}, \omega$ reell und positiv). Das System befindet sich bei $t = 0$ im Grundzustand von H_0. (i) Welche Übergänge zu den angeregten Zuständen von H_0 sind in erster Ordung Störungstheorie möglich für $t > 0$? (ii) Berechnen Sie die Übergangsrate mit Fermis Goldener Regel. (iii) Schätzen Sie das *Zeitintervall* ab, in welchem die Bedingung für Fermis Goldene Regel erfüllt ist.

c) Sei $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ein eindimensionaler Hamiltonoperator. Geben Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für die Zeitableitung des Impulsoperators $p_H(t)$ und die entsprechende klassische Hamiltongleichung für den klassischen Impuls p_{kl} an. Für welches der Potentiale (i) $V(x) = \frac{1}{2}\beta x^3 + \gamma x^4$; (ii) $V(x) = konst.$; (iii) $V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \gamma x^4$; (iv) $V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \alpha x$ ($\kappa, \alpha, \beta, \gamma$ reelle positive Konstanten) zeigen die quantenmechanischen Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$ und $\langle p\rangle(t)$ die gleiche Dynamik wie die klassischen Variabeln $x_{kl}(t)$ und $p_{kl}(t)$?

d) Für ein Spin S-System haben wir den Hilbertraum $H = \mathbb{C}^M$ mit $M = 2S+1$. Von wie vielen unabhängigen, reellen Parametern hängt eine allgemeine Dichtematrix für einen Spin S ab?

2. Bragg-Streuung

6+4=10 Punkte

Betrachten Sie folgendes Potential für die Streuung von Elektronen an einem 1-dimensionalen Gitter im $\mathbb{R}^3$:

$$V(\mathbf{r}) = \alpha \sum_{n=-N}^{+N} \delta(z)\delta(y)\delta(x - nd), \quad \alpha, d \in \mathbb{R}^+,\ N \in \mathbb{N}^+$$

a) Berechnen Sie in erster Bornscher Näherung die Streuamplitude $f(\vec{q})$ zunächst als Funktion des Impulsübertrags $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ an, wobei $\vec{k}'$ in Richtung des Detektors zeigt und $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$.

b) Geben Sie nun unter der Annahme $\vec{k} = (0, 0, k)$ die Streuamplitude auch als Funktion der Raumwinkel θ und ϕ an. Für welche Winkel θ wird der differentielle Streuquerschnitt maximal, wenn man nur Streuung in der xz-Ebene, d.h. $\phi = 0$ betrachtet?

[Hinweise: Ein Lösunganansatz verwendet $\sum_{i=0}^{N} a^i = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ und de l'Hospital].

3. Sudden und adiabatsiche Nährung

3+7+5=15 Punkte

Der Hamiltonoperator eines fixierten Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens im Magnetfeld lautet:

$$H = g\mu_B \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t), \quad g, \mu_B \in \mathbb{R}^+$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind und $\vec{B}(t) = (B_x\theta(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), 0, B_z)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Grundzustand.

Hinweis: Pauli-Matrizen $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

a) Wie müssen (ohne Beweis) B_x, B_z und τ zueinander in Beziehung stehen, um dieses Problem i) in Sudden Approximation bzw. (ii) in adiabatischer Näherung behandeln zu können?

b) Berechnen Sie für einen beliebigen Zeitpunkt $t \gg \tau$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden, in der Sudden Approximation für $B_z = 4\mathcal{B}$ und $B_x = 3\mathcal{B}$.

c) Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t^* = \tau \ln 2$ die Energie des Teilchens in adiabatischer Nährung für $B_z = 4\mathcal{B}$ und $B_x = 3\mathcal{B}$.

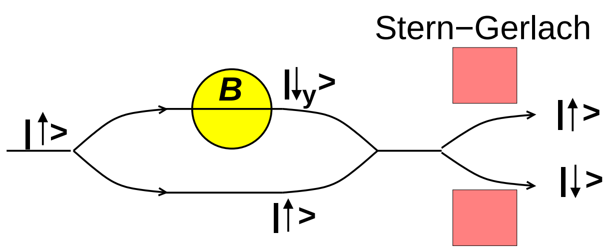
4. Reduzierte Dichtematrix

2+5+4+3+2=11+5* Punkte*

[Alle Teilaufgaben können auch unabhängig bearbeitet werden]

a) Berechnen Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ eines in (negative) y-Richtung polarisierten Spins $|\downarrow_y\rangle$ als Matrix in den S_z-Eigenfunktionen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Zeigen Sie durch eine Spur in S_z-Basis, dass $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand beschreibt.

Ein in z-Richtung polarisierter Teilchenstrahl $|\uparrow\rangle$ wird nun durch einen Strahlteiler in zwei Teilstrahlen geteilt. Einer der Teilstrahlen durchläuft ein Magnetfeld $\vec{B}$ mit $H = g\mu_B\vec{B}\vec{S}$.



b)* Welche Zeit muss ein Magnetfeld auf einen Spin $|\uparrow\rangle$ wirken, damit dieser im Anschluss als $|\downarrow_y\rangle$ ausgerichtet ist? In welche Richtung muss das Magnetfeld zeigen?

Die in der Skizze im Stern-Gerlach-Apparat ankommende Wellenfunktion sei

$$|\Psi\rangle = |k'\rangle|\uparrow\rangle/\sqrt{2} + |k\rangle[|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle]/2\ ; \tag{1}$$

$k \neq k'$ beschreibt zusätzliche inelastische Streuung.

c) Berechnen Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ des quantenmechanischen Systems Glg. (1).

d) Berechnen Sie den auf den Spin-Raum reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_{\text{spin}}$ (*Der Hilbertraum ist der Produktraum aus Orts- und Spin-Komponente*). Beschreibt $\hat{\rho}_{\text{spin}}$ einen reinen Zustand?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich welches Messergebnis für die S_z-Messung?

Viel Erfolg!