Technische Universität
Wien

Ass. Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

1. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 17.10.2014.

1. Zeitentwicklung in unterschiedlichen Darstellungen *0.5+3+1.5=5 Punkte*

Betrachten Sie ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem externen Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, B_y, B_z)$, welches durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird:

$$H = -g_S \mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

Dabei sind g_S und μ_B positive reelle Konstanten und $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, wobei die σ_i die Paulimatrizen bezeichnen.

a) Geben Sie die Darstellung des Hamilton-Operators in der Eigenbasis des Operators S_z an. Teilen Sie den Hamilton-Operator folgendermaßen auf:

$$H = \underbrace{H_0}_{S_z\text{-Anteil}} + \underbrace{V}_{S_y\text{-Anteil}} .$$

b) Das System befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Eigenzustand $|\Psi(t = 0)\rangle = |s_z = -\frac{1}{2}\rangle$ des ungestörten Hamiltonians H_0. Geben Sie die Zeitentwicklung des Zustandes (also $|\Psi(t)\rangle$) im

i) Schrödingerbild,

ii) Heisenbergbild und

iii) Wechselwirkungsbild (mit der Aufteilung des Hamilton-Operators wie in **a)**)

für beliebige Zeiten $t > 0$ an. Zur numerischen Vereinfachung der Rechnung nehmen Sie an, dass $B_y = \frac{3}{4}B_z$ gilt.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Observablen S_z im Schrödinger- und Wechselwirkungsbild für beliebige Zeiten $t > 0$. (Nehmen Sie wiederum an, dass $B_y = \frac{3}{4}B_z$ gilt.) Ist das Resultat abhängig vom verwendeten Bild? Was erwarten Sie demnach für den entsprechenden Erwartungswert im Heisenbergbild?

2. Ritzsches Variationsverfahren

0.5+2+0.5+2=5 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das in einem eindimensionalen Deltapotential der Stärke α gebunden ist:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x) \quad \text{mit } m, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Geben Sie unter Verwendung der Testwellenfunktion

$$\psi(x) = A\,(a + |x|)^{-\nu} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+, \nu \in \mathbb{R}^+, \nu > 0.5$$

mithilfe des Ritzschen Variationsverfahrens eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie dieses Systems an. Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A der Testwellenfunktion.

b) Ermitteln Sie den Erwartungswert der Gesamtenergie des Systems $\langle E \rangle$ der Testwellenfunktion und minimieren Sie diesen bezüglich des Parameters a. Welchen Wert nimmt $\langle E \rangle$ nun an? (*Hinweis: Beachten Sie, dass beim Differenzieren der Betragsfunktion singuläre Beiträge an der Stelle x=0 auftreten können.*)

c) Für welchen Wert von ν wird der in Punkt **b)** bestimmte Ausdruck für $\langle E \rangle$ minimal?

d) Lösen Sie die Schrödingergleichung für dieses Problem exakt. Vergleichen Sie sowohl die ermittelte Wellenfunktion als auch den Energieerwartungswert der exakten Lösung mit dem Ergebnis des Variationsverfahrens. Was fällt Ihnen auf? (*Hinweis:* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$).