Technische Universität
Wien

Ass. Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

2. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

TUTORIUM: Freitag, 31.10.2014.

3. Methoden zeitabhängiger Störungstheorie

1+1.5+1+1.5=5 Punkte

Ein quantenmechanischer Rotor mit Drehimpuls ($l = 1$) wird in ein zeitabhängiges Magnetfeld eingebracht. Der zugehörige Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} + g_L \mu_B \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}(t) \quad \text{mit } I, g_L, \mu_B \in \mathbb{R}^+$$

Das Magnetfeld ist durch

$$\mathbf{B}(t) = (B_0, 0, B_0 f(t))$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\hbar/\Gamma} \cos(\omega t), & \text{falls } t \leq \hbar/\Gamma \\ \cos(\omega t), & t > \hbar/\Gamma \end{cases}$$

($\Gamma \in \mathbb{R}^+$ und $\omega \in \mathbb{R}_0^+$) gegeben. Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand. Der zeitabhängige Anteil des Hamiltonoperators soll als Störterm betrachtet werden. Zur Vereinfachung der Rechnung können Sie den $\mathbf{L}^2$-Term des Hamiltonoperators vernachlässigen.

a) Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t = 0$ (d.h., für den ungestörten Hamiltonoperator) den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand des Systems.

b) Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit das System zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ im ersten angeregten Zustand (aus Punkt **a**) anzutreffen. Unter welcher Bedingung ist Fermis Goldene Regel gültig? *Hinweis: Das Ergebnis muss nach der Ausführung der Integration nicht mehr weiter vereinfacht werden.*

c) Unter welchen Bedingungen an Γ und ω ist die sudden approximation auf obiges Problem anwendbar? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ im ersten angeregten Zustand (aus Punkt **a**) anzutreffen, in der sudden approximation.

d) Unter welchen Bedingungen an Γ und ω kann man die adiabatische Approximation auf obiges Problem anwenden? Setzen Sie ω zu einem Wert Ihrer Wahl, der mit diesen Bedingungen verträglich ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zum fixierten Zeitpunkt $t_A = \frac{\hbar}{2\Gamma}$ im ersten angeregten Zustand (aus Punkt **a**) anzutreffen, in adiabatischer Approximation.

4. Dichtematrix und verschränkte Zustände *0.5+1+0.5+1+0.5+1+0.5=5 Punkte*

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, welches aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen besteht. Der Hamiltonoperator des Systems sei gegeben durch

$$H = -\frac{g}{\hbar}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

wobei $\mathbf{S}_i = \frac{\hbar}{2}(\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ den Spinoperator des i-ten Teilchen bezeichnet (σ_i^r $(r = x, y, z)$ sind die Pauli-Matrizen für den Spin $i = 1$ bzw. 2).

a) Geben Sie eine Basis für den Hilbertraum des Gesamtsystems an und stellen Sie den Hamiltonoperator in dieser Basis dar.

b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \equiv |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$. Berechnen Sie die Wellenfunktionen $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ und geben Sie deren explizite Darstellung in der von Ihnen im Punkt **a)** gewählten Basis an.

Ein Zustand $|\phi\rangle$ eines aus zwei (oder mehreren) Teilsystemen bestehenden Gesamtsystems wird als *verschränkt* bezeichnet, wenn er sich *nicht* als direktes Produkt von Zuständen $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$ der Teilsysteme 1 und 2 schreiben läßt, d.h. es existieren keine $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$ aus dem Teilsystem 1 bzw. 2 sodass $|\phi\rangle = |\phi\rangle_1 |\phi\rangle_2$.

c) Zu welchen Zeiten $t \geq 0$ ist der Zustand $|\psi(t)\rangle$ aus **b)** nicht verschränkt?

d) Wie lautet die Dichtematrix des Gesamtsystems $\hat{\rho}(t)$ für $t \geq 0$. Geben Sie diese auch in der von Ihnen gewählten Basis an.

e) Berechnen Sie das Zeitmittel der Dichtmatrix mittels

$$\overline{\hat{\rho}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\ \hat{\rho}(t).$$

War das entsprechende Ergebnis zu erwarten?

f) Wie lautet die auf den Spin 1 reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_1(t)$ zur Zeit $t \geq 0$? Geben Sie diese auch explizit in der Basis $\{|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1\}$ an.

g) Zu welchem Zeitpunkt entspricht die totale Dichtematrix aus **d)** bzw. die reduzierte Dichtematrix aus **f)** einem reinen Zustand? Vergleichen Sie die entsprechenden Zeiten auch mit dem Ergebnis aus Punkt **c)**. Was fällt Ihnen auf?