Technische Universität Wien

Ass. Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

3. Übung zur Quantentheorie II

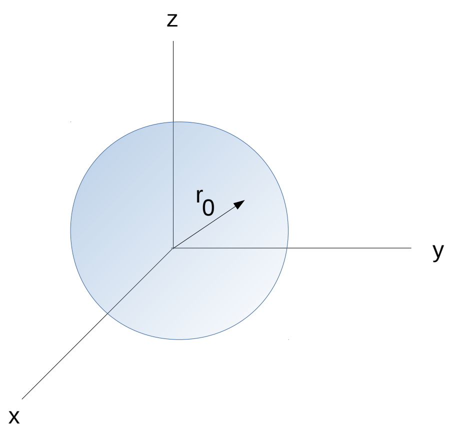
Wintersemester 2014/2015

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 14.11.2014.

5. Bornsche Näherung *2+2.5+0.5=5 Punkte*

Es soll ein Streuexperiment eines Teilchens mit Masse m an einem dreidimensionalen, rotationssymmetrischen Potential der Stärke V_0 und Reichweite r_0 durchgeführt werden:

$$V = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases} \quad \text{mit } m, r_0, V_0 \in \mathbb{R}^+$$



a) Die erste Bornsche Näherung ist anwendbar, wenn Korrekturen höherer Ordnung klein sind. Eine erste Abschätzung kann durch den Vergleich der Wellenfunktion in erster Bornscher Näherung mit der einfallenden ebenen Welle gewonnen werden. Geben Sie einen allgemeinen mathematischen Ausdruck für dieses Kriterium in Ortsdarstellung an und werten Sie diesen für obiges Potential aus. Betrachten Sie insbesondere die Grenzfälle niedriger und hoher Energie? Was könnte bei niedrigen Energien passieren?

b) Berechnen Sie zunächst allgemein den differentiellen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)\big|_{1.\mathrm{B.N.}}$. Betrachten Sie danach speziell den Grenzfall niedriger Energie. Was fällt Ihnen auf?

c) Berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung $\sigma\big|_{1.\mathrm{B.N.}}$ für den in **b)** betrachteten Grenzfall kleiner Energien.

6. Streuphase in $d = 1$ Dimensionen *1.5+1+0.5=3 Punkte*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & -\infty < x < -\frac{L}{2} \\ -V_0, & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < \infty \end{array} \right\},$$

für $V_0 > 0$ (“Potentialtopf”).

a) Berechnen Sie die Streuzustände für dieses System, d.h. lösen Sie die Schroödingergleichung für $E > 0$. Nehmen Sie hierbei als Randbedingung eine von $x = -\infty$ einlaufende Welle an.

b) Betrachten Sie nun die Phasenverschiebung der transmittierten Welle, d.h. die Streuphase $\delta(E)$ im Transmissionskoeffizienten $T = |T|e^{i\delta(E)}$. Bestimmen Sie deren Werte im Limes $E \to 0$. Gehen Sie hierzu wie folgt vor: Betrachten Sie zunächst die Streuphase (im Limes $E \to 0$) für kleine Werte von V_0. Untersuchen Sie danach die Änderung der Streuphase wenn Sie V_0 stetig erhöhen, und geben sie die Streuphase $\delta(E \to 0)$ als Funktion von V_0 an. (*Beachten Sie, dass die Streuphase als Funktion von V_0 monoton wachsend sein sollte.*)

c) Zeigen Sie, dass $\frac{\delta(E\to 0)}{\pi} + 0.5$ der Zahl der gebunden Zustände in diesem System entspricht (Levinson Theorem). *Hinweis: Für die Zahl der gebundenen Zustände im eindimensionalen Potentialtopf können Sie auf die entsprechenden Ergebnisse aus QM I zurückgreifen.*

7. Streuquerschnitt in Partialwellenentwicklung *1+1=2 Punkte*

In der Vorlesung wird noch gezeigt werden, dass für radialsymmetrische Potentiale $V(\mathbf{r}) = V(r = |\mathbf{r}|)$ die Streuamplitude $f(\theta, \phi)$ für ein in z-Richtung zum Streuzentrum einlaufendes Teilchen vom Winkel ϕ unabhängig ist und wie folgt geschrieben werden kann:

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta),$$

wobei f_l in 1. Born'scher Näherung durch

$$f_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int dr' r'^2 V(r') (j_l(kr'))^2$$

gegeben ist. Hierbei sind $P_l(x)$ die Legendre-Polynome und $j_l(x)$ die sphärischen Bessel-Funktionen.

a) Berechnen Sie für $V(\mathbf{r}) = V_0 e^{-|\mathbf{r}|/r_0}$ die s-Wellen Streuamplitude f_0. (*Hinweis:* $P_0(x) = 1$ *und* $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$).

b) Berechnen Sie für dieses f_0 den totalen Streuquerschnitt σ_{tot}. Wie verhält sich dieser für größere Energien $k \to \infty$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis auch mit dem entsprechenden Resultat aus dem Plenum.