3. ÜBUNG ZUR QUANTENTHEORIE II

(5) BORNSCHE NÄHERUNG

$$V = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

a) $|\psi^+_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} G^+(\vec{k}) V |\vec{k}\rangle$ 1. Bornsche Näherung

Bornsche Näherung anwendbar, wenn 1.-Ordnungsterm vernachlässigbar gegenüber 0.-Ordnungsterm.

$$\left|\frac{2m}{\hbar^2}\langle\vec{r}|G^+(\vec{k})V|\vec{k}\rangle\right| \ll |\langle\vec{r}|\vec{k}\rangle|$$

Greensche Funktion für stat. SGL:

$$G^+ = -\frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\left|\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r'\, G^+(\vec{k},\vec{r},\vec{r}')\, V(\vec{r}')\, \phi_k(\vec{r}')\right| \ll |\phi_k(\vec{r})|$$

Korrektur am größten bei $r=0$

$$\left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\underbrace{\int d^3r\, \frac{e^{ikr}}{r} V(r)\, e^{i\vec{k}\vec{r}}}\right| \ll 1$$

$$\int d^3r\, \frac{e^{i(kr+\vec{k}\vec{r})}}{r} V(r) = -V_0\int_0^{r_0} dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)}$$

$\cos\theta = u$
$du = -\sin\theta\, d\theta$

$$= -2\pi V_0 \int_0^{r_0} dr\, r \int_{-1}^{1} du\, e^{ikr(1+u)}$$

$$= -2\pi V_0 \int_0^{r_0} dr\, r\, \frac{1}{ikr}\left(e^{2ikr}-1\right)$$

$$= -\frac{2\pi V_0}{ik}\left(\frac{e^{2ikr_0}-1}{2ik} - r_0\right)$$

hohe Energien:

$$\frac{mV_0 r_0}{\hbar^2} \ll k$$

kleine Energien:

$$\frac{mV_0}{\hbar^2}\left|\left(-\frac{\cancel{1}+2ikr_0-2k^2r_0^2+\mathcal{O}(k^3r_0^3)-\cancel{1}}{2k^2}+\frac{ir_0}{k}\right)\right| \ll 1$$

$$\frac{mV_0 r_0^2}{\hbar^2} \ll 1$$

Für niedrige Energien ist die 1. BN brauchbar, sofern das Potential nicht zu tief und genügend kurzreichweitig ist!

b)

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{1.BN} = |f(\theta,\varphi)|^2 = \Big|-\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\underbrace{\langle \vec{k}'|V|\vec{k}\rangle}_{\frac{1}{(2\pi)^3}\tilde{V}(\vec{q})}\Big|^2 \qquad \vec{q}=\vec{k}-\vec{k}'$$

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int d^3r\, V(\vec{r})\, e^{-i\vec{q}\vec{r}}$$

$$= -V_0\int_0^{r_0} dr\, r^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, e^{-iqr\cos\theta}$$

$$= -\frac{4\pi V_0}{q}\int_0^{r_0} dr\, r\sin qr \qquad q=|\vec{q}|=2k\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{4\pi V_0}{q^3}\left(qr_0\cos qr_0 - \sin qr_0\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4 q^6}\left[q^2r_0^2\cos^2 qr_0 + \sin^2 qr_0 - qr_0\sin 2qr_0\right]$$

$$\lim_{q\to 0}\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{4m^2V_0^2r_0^2}{\hbar^4 q^4}\left[\left(1-\frac{q^2r_0^2}{2}\right)-\left(1-\frac{q^2r_0^2}{6}\right)+\mathcal{O}(q^3r_0^3)\right]^2$$

$$= \frac{4m^2V_0^2r_0^6}{9\hbar^4}$$

unabhängig von θ und E

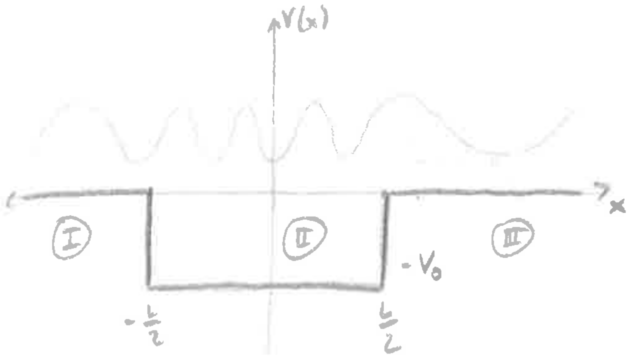
c) $\sigma_{tot}\Big|_{q=0} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$

$$= 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16\pi m^2 V_0^2 r_0^6}{9\hbar^4}$$

Das Raumwinkelintegral ist trivial, da $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ unabhängig von ϑ und φ.

---

⑥ Streuphase in d=1 Dimension



$E > 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

a) $\psi_I(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}$

$\psi_{II}(x) = a e^{iqx} + b e^{-iqx}$

$\psi_{III}(x) = t e^{ikx}$

$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$q = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$

A.B.: $\psi_I(-\frac{L}{2}) = \psi_{II}(-\frac{L}{2}) \to e^{-ik\frac{L}{2}} + r e^{+ik\frac{L}{2}} = a e^{-iq\frac{L}{2}} + b e^{+iq\frac{L}{2}}$

$\psi_I'(-\frac{L}{2}) = \psi_{II}'(-\frac{L}{2}) \to k\left(e^{-ik\frac{L}{2}} - r e^{+ik\frac{L}{2}}\right) = q\left(a e^{-iq\frac{L}{2}} - b e^{+iq\frac{L}{2}}\right)$

$\psi_{II}(+\frac{L}{2}) = \psi_{III}(\frac{L}{2}) \to a e^{iq\frac{L}{2}} + b e^{-iq\frac{L}{2}} = t e^{ik\frac{L}{2}}$

$\psi_{II}'(\frac{L}{2}) = \psi_{III}'(\frac{L}{2}) \to q\left(a e^{iq\frac{L}{2}} - b e^{-iq\frac{L}{2}}\right) = k t e^{ik\frac{L}{2}}$

$\Rightarrow t = \left(\cos qL - \frac{i}{2}\left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q}\right)\sin qL\right)^{-1} e^{-ikL}$

$r = t\,\frac{i}{2}\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)\sin qL$

$a = \frac{t}{2}\left(1 + \frac{k}{q}\right) e^{i(k-q)\frac{L}{2}}$

$b = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{k}{q}\right) e^{i(k+q)\frac{L}{2}}$

b) $\delta(E) = \operatorname{atan}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{k}+\frac{k}{q}\right)\tan qL\right] - kL$ | $\delta = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im} t}{\operatorname{Re} t}\right)$

$$\delta(E\to 0) \approx \operatorname{atan}\left[\frac{q}{2k}\tan qL\right]$$

Sobald $V \neq 0$ geht das Argument gegen ∞ und der ArcTan gegen $\pi/2$

$qL = 0 \;\to\; \delta(E\to 0) = 0$

$0 < qL < \pi \;\to\; \delta(E\to 0) = \frac{\pi}{2}$

$\pi < qL < 2\pi \;\to\; \delta(E\to 0) = \frac{3\pi}{2}$

$2\pi < qL < 3\pi \;\to\; \delta(E\to 0) = \frac{6\pi}{2}$

Jedes Mal wenn $\tan qL$ divergiert, springt man auf den nächsten Ast des ArcTan. Wechselt $\tan qL$ sein Vorzeichen, erhöht sich die Phase um π

$\Rightarrow$ für $V_0 > 0$ gilt somit

$$\delta(E\to 0) = \frac{\pi}{2} + \pi \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \pi(n+1) \geq qL = \frac{\sqrt{2mV_0}\,L}{\hbar} \right\}$$

c) $N_b = \frac{\delta(E\to 0)}{\pi} + \frac{1}{2}$

$$= 1 + \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \pi(n+1) \geq \frac{\sqrt{2mV_0}\,L}{\hbar} \right\}$$

$$= \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; n \geq \frac{\sqrt{2mV_0}\,L}{\hbar\pi} \right\}$$

Dieser Ausdruck entspricht genau der Anzahl an Bindungszuständen im 1d-Potentialtopf.

7 Streuquerschnitt in Partialwellenentwicklung

a) $$f_0 = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r^2\, V(r)\left[j_0(kr)\right]^2$$

$$V(r) = V_0\, e^{-\frac{r}{r_0}}$$

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2}\int_0^\infty dr\, e^{-\frac{r}{r_0}}\, \underbrace{\sin^2 kr}_{= -\frac{1}{4}\left(e^{2ikr} + e^{-2ikr} - 2\right)}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2}\,\frac{2k^2 r_0^3}{1+4k^2 r_0^2} = -\frac{4mV_0 r_0^3}{\hbar^2}\,\frac{1}{1+4k^2 r_0^2}$$

b) $$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{s-Welle}} = |f_0|^2 = \frac{16m^2V_0^2 r_0^6}{\hbar^4}\,\frac{1}{(1+4k^2r_0^2)^2}$$

s-Welle diff. Streuquerschnitt ist unabhängig von θ und ϕ

$$\Rightarrow \left.\sigma_{tot}\right|_{\text{s-Welle}} = 4\pi\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{s-Welle}} = \frac{64\pi m^2V_0^2r_0^6}{\hbar^4(1+4k^2r_0^2)^2}$$

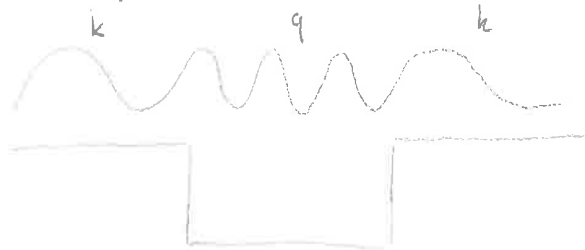
$$\lim_{k\to 0}\sigma_{tot} = \frac{64\pi m^2V_0^2r_0^6}{\hbar^4}$$

Vergleich mit Ergebnis aus Plenum:

$$\lim_{k\to 0} 2\pi\left(\frac{2mV_0r_0^2}{\hbar^2 k}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\left.\frac{x^2(3+3x^2+x^4)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=2kr_0}$$

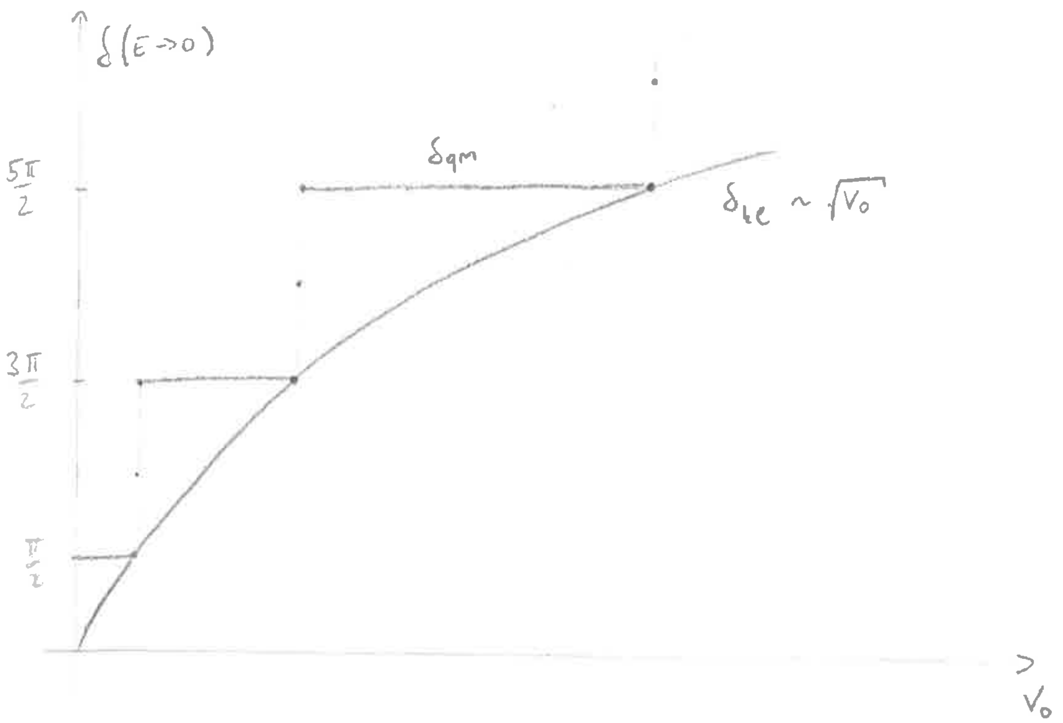
$$\left.\sigma_{tot}\right|_{\substack{\text{Born}\\ k=0}} = \frac{64\pi m^2V_0^2r_0^6}{\hbar^4} = \left.\sigma_{tot}\right|_{\substack{\text{s-Welle}\\ k=0}}$$

ad 6c) semiklassisch :



$$\delta_{kl} = (q-k)L$$

$$\delta_{kl}(E \to 0) = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} L$$



Die klassische Streuphase ist eine kontinuierliche Funktion von V_0. Die quantenmechanische Streuphase ist quantisiert und immer größer als die klassische. Sie springt immer um π, wenn die klassische Phase ihren Wert erreicht.