Technische Universität Wien

Ass. Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

# 4. Übung zur Quantentheorie II

*Wintersemester 2014/2015*

**<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 5.12.2014.**

## 8. Galilei-Transformation der Schrödingergleichung *1+2.5+1.5=5 Punkte*

Ein Inertialsysteme $S'$ bewegt sich relativ zum Inertialsystem $S$ mit konstanter Geschwindigkeit $v>0$ in positive $x$-Richtung, wobei die Koordinatenachsen von $S$ und $S'$ parallel zueinander sind und die Ursprünge der Koordinatensysteme zum Zeitpunkt $t=0$ zusammenfallen.

**a)** Geben Sie die entsprechenden klassischen (Galilei-)Transformationen für $t \to t'$, $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ und $\mathbf{p} \to \mathbf{p}'$ an.

**b)** In der Quantenmechanik ist die entsprechende Galilei-Transformation durch folgenden unitären Operator gegeben

$$G(v,t) = e^{-i\frac{v}{\hbar}(m\hat{x}-t\hat{p}_x)},$$

wobei $m>0$ die Masse des Teilchens darstellt. Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung unter dieser Transformation invariant ist, d.h., dass

$$G^\dagger(v,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right)G(v,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H,$$

mit $H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$. (*Hinweis:* $e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}$ *wenn* $[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0$).

**c)** Betrachten Sie nun die eindimensionale Schrödingergleichung für das folgende zeitabhängige Potential:

$$V(x,t) = \frac{m\omega^2}{2}(x-vt)^2, \quad v>0.$$

Bestimmen Sie Lösung $\psi(x,t)$ der entsprechenden Schrödingergleichung zur Anfangsbedingung $\psi(x,t=0) = \psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}+i\frac{vm}{\hbar}x}$ mit $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.

## 9. "Zitterbewegung" in der relativistischen Quantenmechanik *1+3+1=5 Punkte*

**a)** Lösen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung für den Operator $\hat{\mathbf{r}}(t)$ im nichtrelativistischen Fall, d.h., für $H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der klassischen Bewegungsgleichung für $\mathbf{r}_{\mathrm{kl.}}(t)$.

**b)** Lösen Sie nun die Heisenberg-Bewegungsgleichung für den Operator $\hat{\mathbf{r}}(t)$ im relativistischen Fall für ein Elektron, d.h., für $H_D = \left(c\alpha\hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2\right)$. Zeigen Sie, dass –im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall– ein Term der Form

$$\hat{\mathbf{r}}(t) \propto e^{-\frac{2itH_D}{\hbar}}$$

auftritt, der eine schnelle Oszillation des Elektrons ("Zitterbewegung") beschreibt. Schätzen Sie aus dem Vorfaktor vor diesem Term die Größenordnung der Amplitude dieser Oszillation ab.

**c)** Aufgrund der Zitterbewegung ist das Elektron in nichtrelativistischer Näherung in einem Potential $V(\mathbf{r})$ (wie z.B. im Wasserstoffatom) nicht mehr exakt lokalisiert, sondern oszilliert um einen Mittelwert $\mathbf{r_0}$. Das führt in der nicht-relativistischen Näherung der Dirac-Gleichung zu einer Korrektur der potentiellen Energie durch einen entsprechenden relativistischen Korrekturterm, den sogenannten *Darwin-Term* (siehe QM1). Schätzen Sie diesen Beitrag folgendermaßen ab: Entwickeln Sie $\langle V(\mathbf{R} + \mathbf{r} - \mathbf{r_0})\rangle$ nach $\langle(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})\rangle$ bis zur zweiten Ordnung, wobei $\langle \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r_0}$. Geben Sie eine grobe Abschätzung des Wertes von $\langle(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})^2\rangle$ mit Hilfe Ihres Resultats aus **b)** an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Ausdruck für den Darwin-Term

$$H_{\text{Darwin}} = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\triangle V).$$