4. Übung QM II

8) Galilei - Transformation

a) klassisch: $t \mapsto t' = t$

$$x \mapsto x' = x - vt$$

$$p \mapsto p' = p - m \cdot v$$

b) $G(v,t) = e^{-i\frac{v}{\hbar}[mx - tp]}$

$$G^\dagger (i\hbar \partial_t - \mathcal{H}) G \overset{!}{=} i\hbar\partial_t - \mathcal{H}$$

gilt für x-unabhängige $\mathcal{H}$

hier: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x \partial_x$

$$G(v,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-i\frac{v}{\hbar}(mx - pt)\right)^n$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x\partial_x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^n = \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{ n(n-1)\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)^2\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^{n-2} +$$

$$2n\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1}\partial_x +$$

$$\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^n \partial_x^2\Big\}$$

Indexverschiebung im 1. und 2. Term erlaubt: $\rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^n \cdot \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-\frac{v^2}{\hbar^2}m^2\right) + 2\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)\partial_x + \partial_x^2\right]\right]$$

$$= G\cdot\left[\frac{(mv)^2}{2m} - 2(mv)\cdot p\cdot\frac{1}{2m} + p^2\right] \quad \mapsto \quad G^\dagger \mathcal{H} G =$$

$$\frac{(p-mv)^2}{2m} \qquad \text{(passt mit klassischer Vorstellung zusammen)}$$

$\ulcorner$ $G^\dagger (i\hbar\partial_t) G \overset{?}{=}$

$$i\hbar\underline{\partial_t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x \underline{t})\right)^n$$

Hier kann nicht einfach nach Potenzregel differenziert werden, da der Vorfaktor von t ein Operator ist

$$\partial_t \left[\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^n\right] =$$

$$\frac{1}{n!}\cdot\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{\ell} \underbrace{v\,\partial_x \left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1-\ell}}$$

$$v\,\partial_x\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1-\ell} =$$

$$v(n-1-\ell)\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-2-\ell} +$$

$$\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1-\ell} v\,\partial_x$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{\ell}\left[\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-2-\ell}\circ\left[v(n-1-\ell)\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1-\ell}\right]\cdot v\,\partial_x\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-2}\left[v(n-1-\ell)\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)\right] +$$
$$\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1} v\,\partial_x$$

ℓ-Summen führen zu: (siehe Add.)

$$\frac{1}{n!}\left\{\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-2}\cdot v\left(-i\frac{v}{\hbar}m\right)\cdot\frac{(n-1)n}{2} +\right.$$
$$\left.\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^{n-1} n\, v\,\partial_x\right\}$$

$$= \sum_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^n\circ\left(\frac{-iv^2}{2\hbar}m + v\,\partial_x\right)$$

mit Vorfaktor $i\hbar \to$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{v}{\hbar}(mx+i\hbar\partial_x t)\right)^n\circ\left(\frac{v^2}{2}m - vp\right)$$

$$= G\left(\frac{v^2}{2}m - vp\right)$$

$\mapsto$ In Summe gilt $G^\dagger \mathcal{H} G = \mathcal{H}' = \left(\frac{p - mv}{2m}\right)^2$

$$G^\dagger i\hbar\,\partial G = \frac{(mv)^2}{2m} - vp$$

$$\mapsto G^\dagger(\mathcal{H} - i\hbar\partial_t)G = \mathcal{H} - i\hbar\,\partial_t$$

c) $V(x,t) = \frac{m\omega^2}{2}(x - vt)^2$

$$\Psi(x,t=0) = \Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2} + i\frac{v}{m\hbar}x} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$V(x,t)$ ist ein (zeitlich) verschobener Harmonischer Oszilator

an $t=0$ gilt: $G = e^{-i\frac{v}{\hbar}(m\hat{x})}$

Speziell: $G\Psi = \Psi' = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

Zeitentwicklung in diesem System ↦ weil Grundzustand ↦

$$\psi'(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\left(\frac{\alpha x^2}{2}\right)} \cdot e^{-i\frac{\omega}{2}t}$$

zurücktransformieren ↦ $\Psi(x',t')$ aus

$$G^\dagger \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}\, e^{-i\frac{\omega}{2}t}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(+i\frac{v}{\hbar}(mx + i\hbar\partial_x t)\right)^n \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-i\frac{\omega}{2}t}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-i\frac{\omega t}{2}} \sum_n \frac{1}{n!}\left(i\frac{v}{\hbar}\right)^n \left(mx + \underbrace{i\hbar\partial_x}_{-p} t\right)^n e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger - a)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-i\frac{\omega}{2}t} \sum_n \frac{1}{n!}\left(i\frac{v}{\hbar}\right)^n \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \cdot \left(m(a+a^\dagger) - itm\omega(a^\dagger - a)\right)^n e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, im\frac{v}{\hbar}\left(\omega t(a^\dagger - a) + i(a^\dagger + a)\right)\right)}\, \Psi_0$$

$$e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, im\frac{v}{\hbar}\left(a^\dagger(\omega t + i) + a(i - \omega t)\right)}\, \Psi_0$$

Laut Hinweis ↦ $e^{\cancel{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, mi\frac{v}{\hbar}\, a^\dagger(\omega t + i)}}\, e^{\cancel{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, im\frac{v}{\hbar}\, a(i - \omega t)}}$

$$e^{\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} v \left(a^\dagger(\omega t + i)\right) + \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} v \left(a(i - \omega t)\right)}$$

laut Hinweis $\mapsto$

$$e^{\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} v \, a^\dagger (\omega t + i)} \cdot e^{\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} v \left(a(i-\omega t)\right)} \cdot$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} v \, a^\dagger(\omega t + i);\ \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} v \, a(i-\omega t)\right]} =$$

$$-\frac{1}{2} \frac{m v^2}{2\hbar\omega} (\omega t + i)(i - \omega t) \underbrace{\left(a^\dagger a - a a^\dagger\right)}_{-1}$$

$$= \frac{m v^2}{4\hbar\omega} \cdot \left(-1 - (\omega t)^2\right) = -\frac{m v^2}{4\hbar\omega} \left(1 + (\omega t)^2\right)$$

Vorteil: $a|\Psi_0\rangle = \emptyset \rightarrow e^{ca} |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle$

$$\mapsto \Psi \rightsquigarrow e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{m v^2}{4\hbar\omega}(1+(\omega t)^2)} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m v^2}{2\hbar\omega}} (\omega t + i)\right)^n \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n |\Psi_0\rangle}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m v^2}{2\hbar\omega}} (\omega t + i)\right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} |\Psi_n\rangle$$

Es gilt: $$a \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m v^2}{2\hbar\omega}} (\omega t + i)\right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} |\Psi_n\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m v^2}{2\hbar\omega}} (\omega t + i)\right)^n \frac{1}{\sqrt{n-1!}} |\Psi_{n-1}\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{m v^2}{2\hbar\omega}} (\omega t + i) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m v^2}{2\hbar\omega}} (\omega t + i)\right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} |\Psi_n\rangle$$

also ist Ψ eine Eigenfunktion zu $\underline{\underline{a}}$;
ein sogenannter kohärenter Zustand

Beispiel 8, alternative (vorgesehene) Lösung

4 Übung

a) wie bisher:

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$
$$p' = p - mv$$

b) $$G(v,t) = e^{-i\frac{v}{\hbar}(m\hat{x} - t\hat{p})} = e^{-i\frac{vm}{\hbar}x + \frac{v}{\hbar}t\hbar\partial_x}$$

laut Hinweis $\mapsto$

$$-\frac{1}{2}\left[-i\frac{vm}{\hbar}x, vt\partial_x\right] = \frac{1}{2}\left(-i\frac{mv^2}{\hbar}t\right) = -i\frac{mv^2}{2\hbar}t = -i\frac{E_v}{\hbar}t$$

$$E_v = \frac{mv^2}{2}$$

$$G(v,t) = e^{-i\frac{vm}{\hbar}x}\, e^{vt\partial_x}\, e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t}$$

„ebene-Wellen-Verdrillung" — Translation — „Energiephase durch Kollektivgeschwindigkeit"

$$\rightarrow\quad G^\dagger(i\hbar\partial_t - \mathcal{H})G = e^{i\frac{E_v t}{\hbar}}\, e^{-vt\partial_x}\, e^{i\frac{mv}{\hbar}x}\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m}\right) e^{-i\frac{mvx}{\hbar}}\, e^{vt\partial_x}\, e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t}$$

$$= e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}\, e^{-vt\partial_x}\, \underbrace{e^{i\frac{mv}{\hbar}x}\, i\hbar\partial_t\, e^{-i\frac{mv}{\hbar}x}}_{\text{kommutiert}}\, e^{vt\partial_x}\, e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t} +$$

$$e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}\, e^{-vt\partial_x}\, e^{i\frac{mv}{\hbar}x}\, \frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m}\, e^{-i\frac{mv}{\hbar}x}\, e^{vt\partial_x}\, e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t} =$$

$$e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}\, e^{-vt\partial_x}\left(i\hbar v\partial_x e^{vt\partial_x} + e^{vt\partial_x} i\hbar\partial_t\right) e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t} +$$

$$e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}\, e^{-vt\partial_x}\, e^{i\frac{mv}{\hbar}x}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{m^2v^2}{\hbar^2}\right)e^{-i\frac{mv}{\hbar}x} + 2\frac{\hbar^2}{2m}\left(-i\frac{mv}{\hbar}\right)\partial_x e^{-i\frac{mvx}{\hbar}}\partial_x + e^{-i\frac{mv}{\hbar}x}\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\right) e^{vt\partial_x}\, e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t}$$

$$= e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}\left(i\hbar v\partial_x + i\hbar\partial_t\right)e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t} +$$

$$e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}e^{-vt\partial_x}\left(-\frac{\hbar^2 m^2 v^2}{2\hbar^2 m} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(-i\frac{mv}{\hbar}\right)\partial_x + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\right)e^{vt\partial_x}e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t} =$$

$$e^{i\frac{E_v}{\hbar}t}\left(\cancel{i\hbar v\partial_x} + E_v\right)e^{-i\frac{E_v}{\hbar}t} + i\hbar\partial_t -$$

$$\cancel{\frac{\hbar^2 m v^2}{2}} - \cancel{i\hbar v\partial_x} + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 =$$

$$i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \qquad \square$$

c) $\psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2} + i\frac{vm}{\hbar}x}$ $\qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$$G(v, t=0)\,\psi(x, t=0) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}}} = \psi'(x, t)$$

$\rightarrow$ ψ' = Grundzustand des harmonischen Oszillators in seinem Ruhesystem $\rightarrow$ $\psi'(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}\, e^{-i\frac{\omega}{2}t}$

da $E_G = \frac{\hbar\omega}{2}$

Zurücktransformieren: $\rightarrow$

$$G^+(x,t)\,\psi'(x,t) =$$

$$e^{i\frac{mv^2}{2\hbar}t}\, e^{-vt\partial_x}\, e^{i\frac{mvx}{\hbar}}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{-i\frac{\omega}{2}t} =$$

$$e^{-i\frac{\omega}{2}t}\, e^{i\frac{mv^2}{2\hbar}t}\, \underbrace{e^{-vt\partial_x}}_{\text{Translations-operator: } x\to x-vt}\, e^{-\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{i\frac{mv}{\hbar}x}$$

$$e^{-i\frac{\omega}{2}t}\, e^{i\frac{mv^2}{2\hbar}t}\, e^{-\left(\frac{\alpha(x-vt)}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{i\frac{mv}{\hbar}x}\, e^{\underbrace{i\frac{mv}{\hbar}(-vt)}_{-i\frac{mv^2}{\hbar}t}} =$$

$$\underset{\text{harmonischer-Oszillator-Zeitentwicklung}}{e^{-i\frac{\omega}{2}t}}\; \underset{\text{Energie } E_v = \frac{mv^2}{2} \text{ als zusätzliche Zeitentwicklung}}{e^{-i\frac{mv^2}{2\hbar}t}}\; \underbrace{e^{-\left(\frac{\alpha(x-vt)}{\sqrt{2}}\right)^2}}_{\text{zeitlich verschobenes Gaußwellenpaket}}\; \underbrace{e^{i\frac{mv}{\hbar}x}}_{\text{ebene Welle im Ortsraum}}$$

9) a) $\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

Bewegungsgleichung für $\langle x \rangle (t)$ $\rightarrow$

$$e^{i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}t} \, x \, e^{-i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}t} \quad \mapsto \partial_t \rightarrow$$

$$e^{-i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}t} \underbrace{\left(i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}x - ix\frac{\mathcal{H}}{\hbar}\right)} e^{-i\frac{\mathcal{H}}{\hbar}t} =$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{i}{\hbar}\left(\underbrace{-\partial_x^2 x} + x\,\partial_x^2\right) = \frac{i\hbar}{2m}\left(-2\partial_x\right) = -\frac{i\hbar}{m}\partial_x$$

$$-\partial_x(1 + x\partial_x) = -\partial_x - \partial_x - x\,\partial_x^2$$

$$-\frac{i\hbar}{m}\partial_x \;\hat{=}\; \frac{\hat{p}}{m}$$

$$\mapsto \quad \partial_t \langle x \rangle = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle \;\text{"}\hat{=}\text{"}\; \langle v \rangle$$

b) $\mathcal{H}_D = (c\alpha\hat{p} + \beta mc^2)$

$$\mapsto \quad \left(i\left(\frac{c\alpha\hat{p}}{\hbar} + \cancel{\frac{\beta mc^2}{\hbar}}\right)x - ix\left(\frac{c\alpha\hat{p}}{\hbar} + \cancel{\frac{\beta mc^2}{\hbar}}\right)\right) =$$

$$c\frac{\alpha_i \hbar\,\partial_i}{\hbar}x_j - c\frac{\alpha\,\hbar\,x_j\partial_i}{\hbar} = c\,\alpha_i\,\delta_{ij} = \langle c\,\alpha_j \rangle$$

$$\partial_t \langle x \rangle = c\,\langle \alpha_j \rangle$$

$$\partial_t\langle\alpha_j\rangle = \left\langle i\left(\frac{c\,\alpha_i p_i}{\hbar}\,c\,\alpha_j + \frac{\beta mc^2}{\hbar}\,c\,\alpha_j\right) - c\,\alpha_j\,i\left(c\frac{\alpha_i p_i}{\hbar} + \frac{\beta mc^2}{\hbar}\right)\right\rangle$$

$$i\left(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i\right)\frac{c^2}{\hbar}p_i + i\left(\beta\alpha_j - \alpha_j\beta\right)\frac{mc^3}{\hbar}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_j\sigma_i & \\ & \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}}_{2\cdot\beta\alpha_j}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_i\sigma_j & 0\\ 0 & \sigma_i\sigma_j\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sigma_j\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_j\sigma_i\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}\sigma_i\sigma_j & 0\\ 0 & \sigma_i\sigma_j\end{pmatrix} =$$

$$2\cdot \delta_{ij}\left(\mathbb{1}\right)$$

$\hookrightarrow \partial_t \langle c\alpha_j\rangle = \langle 2i \frac{\mathcal{H}c\alpha_j}{\hbar} - 2i\,\delta_{ij}(\mathbb{1})\frac{c^2}{\hbar}p_j\rangle =$
$\langle 2i\frac{\mathcal{H}c\alpha_j}{\hbar}\rangle - \langle 2i\frac{c^2}{\hbar}p_j\rangle$

Wenn p_j; $\mathcal{H}$ Konstant $\mapsto$

$$\partial_t\langle c\alpha_j\rangle = 2i\langle\frac{E}{\hbar}c\alpha_j\rangle - 2i\langle\frac{c^2}{\hbar}p_j\rangle$$

$$\cancel{\frac{1}{E}\frac{\partial_t\langle c\alpha_j\rangle(t)}{2i\langle c\alpha_j\rangle} \rightarrow = 2i\langle\frac{c^2}{\hbar}p_j\rangle}\quad \cancel{\text{ldt}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2iE}\ln(\langle c\alpha_j\rangle(t)) = 2i}$$

$$\langle c\alpha_j\rangle(t) = \langle c\alpha_0\rangle\cdot e^{-2i\frac{E}{\hbar}t} + \frac{p_jc^2}{E}$$

$\mapsto$ t-Integration $\rightarrow$ $(x_j(t))$ $\rightarrow$

$$x_0 + \underbrace{\frac{p_jc^2}{E}}_{\text{„}v_j\text{"}}t + \langle c\alpha_0\rangle\frac{ie^{-2i\frac{E}{\hbar}t}}{2\frac{E}{\hbar}}$$

$\rightarrow$ Zitterterm mit Amplitude $\frac{\hbar c}{2E}$

c) mit $E\sim mc^2$ $\rightarrow$ amplitude $= \frac{\hbar c}{2mc^2} = \frac{\hbar}{2mc}$

Weil $V(r_i+\Delta r_i) \approx V(r_i) + \partial_j(V)\Delta r_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_l(V)\Delta r_j\Delta r_l$

und die Oszillationen keine Richtung auszeichnen $\mapsto$ nur Quadratische Terme überleben $\rightarrow$

$$V(r) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\partial_i\partial_i(V)\Delta r_i\Delta r_i \rightarrow \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\hbar c}{2E}\right)^2\Delta V$$