Technische Universität
Wien

Ass. Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

5. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

TUTORIUM: Freitag, 19.12.2014.

10. Lorentz-Transformation eines Spinors

1+1+1.5+1.5=5 Punkte

Betrachten Sie die Dirac-Wellenfunktion eines freien Elektrons, das sich bezüglich eines Inertialsystems I mit dem Impuls $\mathbf{p}=(p=m\gamma v,0,0)$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ in positive x-Richtung bewegt:

$$\psi(t,\mathbf{r}) \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p t - px)} \begin{pmatrix} E_p+mc^2 \\ 0 \\ 0 \\ cp \end{pmatrix},$$

wobei $E_p=+\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$. (Sie können die Normierung der Spinor-Wellenfunktion in diesem Beispiel vernachlässigen). Betrachten Sie nun im Folgenden das (zu I achsenparallele) Inertialsystem I', das sich gegenüber I mit der Geschwindigkeit $v>0$ entlang der positiven x-Achse bewegt. Hierbei sollen zum Zeitpunkt $t=0$ die beiden Inertialsysteme zusammenfallen.

a) Begründen Sie physikalisch, wie die oben bezüglich des Systems I angegebene Wellenfunktion $\psi(t,\mathbf{r})$ im System I' aussehen sollte. (Geben Sie $\psi'(t',\mathbf{r}')$ für das Inertialsystem I' explizit an!)

Transformieren Sie nun $\psi(t,\mathbf{r})$ in das (relativ zu I) bewegte Inertialsystem I'. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

b) Lorentz-Transformieren Sie zunächst nur die Raum-Zeit Koordinaten von $\psi(t,\mathbf{r})$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Formel für die äußere Transformation des Spinors $\mathbf{L}=e^{\frac{1}{2}\lambda\frac{\mathbf{v}}{v}\boldsymbol{\alpha}}$, mit $\cosh(\lambda)=\gamma$ und $v=|\mathbf{v}|$, dass die Transformationsmatrix $\mathbf{L}$ im Spinraum für $\mathbf{v}=(v,0,0)$ die Gestalt $\mathbf{L}=\mathbb{1}\cosh(\frac{\lambda}{2})+\alpha_x\sinh(\frac{\lambda}{2})$ hat.

d) Benützen Sie nun das Ergebnis aus **c)** um nun auch die Spinor-Transformation in das bewegte Bezugssytem durchzuführen. *Hinweis:* $\cosh(\frac{\lambda}{2})=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$ *und* $\sinh(\frac{\lambda}{2})=-\frac{v}{c}\frac{\gamma}{1+\gamma}\cosh(\frac{\lambda}{2})$.

11. Identische Teilchen & Vertauschungsentartung

1.5+1.5+0.5+1+0.5=5 Punkte

Hinweis: Dieses Beispiel deckt den Inhalt der VO am Donnerstag und des ersten Teils der VO am nächsten Dienstag (Anfang des neuen Kapitels "Vielteilchensysteme") ab.

a) Betrachten Sie ein System zweier Elektronen mit antiparallelen Spins (d.h., $\pm\frac{\hbar}{2}$ entlang der $z-$Achse). Falls man das Symmetrisierungspostulat **nicht** anwendet, würde man den entsprechenden Zustand schreiben als:

$$|\psi(1,2)\rangle = \alpha|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2+\beta|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 \ \text{ mit } \ |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \tag{1}$$

wobei wir den Ortsanteil des Zustandes vernachlässigt haben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung beide Spins in positive $x-$Richtung zeigen, und verifizieren Sie, dass das Resultat dieser Messung explizit von den Vertauschungskoeffizienten α und β abhängt.

b) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung einen Spin in positiver x- und einen in positiver z-Richtung zu finden. Beachten Sie hierbei, dass in diesem Fall eine Vertauschungsentartung nicht nur für den Zustand $|\psi(1,2)\rangle$, in dem sich das System befindet, sondern auch für den zu messenden Zustand besteht.

c) Wie sehen die Ergebnisse von **a)** und **b)**, aus wenn man die korrekte Symmetrisierung für fermionische Zustände verwendet? Nehmen Sie hierfür an, dass der Ortsanteil der Wellenfunktion unter Teichenvertauschung symmetrisch ist.

d) Betrachten Sie nun ein System mit drei identischen und nicht-wechselwirkenden Teilchen, die sich im eindimensionalen harmonischen Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ bewegen. Berechnen Sie die Energie, die Entartung und den expliziten Ausdruck (in Dirac-Notation) des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes für die Fälle, dass die drei identischen Teilchen (i) Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$, bzw. (ii) Bosonen mit Spin 0 sind.

e) Betrachten Sie das gleiche System, wie in **d)**, aber nun mit N identischen Teilchen. Berechnen Sie die maximale Energie eines einzelnen Teilchens im Grundzustand des Systems für die Fälle von (i) Bosonen mit Spin 1, (ii) Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$, (iii) Fermionen mit Spin $\frac{3}{2}$.