QUANTENTHEORIE II

19.12.2014

5. Übung

(10) LORENTZ-TRANSFORMATION EINES SPINORS

$$\psi(t,\vec{r}) \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p t - px)} \begin{pmatrix} E_p + mc^2 \\ 0 \\ 0 \\ pc \end{pmatrix}$$

a) I' bewegt sich relativ zu I mit gleicher Geschwindigkeit wie das Elektron → das Elektron ruht in I'

$$\Rightarrow \quad \psi'(t',\vec{r}') \propto e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Lorentz boost in x-Richtung

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$
$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$

Exponent:

$$-\frac{i}{\hbar}\left(\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}\, t - px\right)$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left(\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma^2 + 1}\; mc^2 t - \gamma m v x\right)$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left(\underbrace{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + 1}}_{=\gamma}\; mc^2 \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) - \gamma^2 m v\left(x' + \beta c t'\right)\right)$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left(\underbrace{\left(\gamma^2 m v - \gamma^2 m v\right)}_{=0} x' + \underbrace{\left(\gamma^2 mc^2 - \gamma^2 mc^2 \beta^2\right)}\, t'\right)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} mc^2 \cancel{\gamma^2} \underbrace{\cancel{\left(1 - \beta^2\right)}}_{=\gamma^2} t' \quad = \quad -\frac{i}{\hbar} mc^2 t'$$

c) $L = e^{\frac{1}{2}\lambda \frac{\vec{v}}{v}\alpha}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= e^{\frac{\lambda}{2}\alpha_x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (\alpha_x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n} \frac{1}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n+1} \frac{\alpha_x}{(2n+1)!}$$

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_x)^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_4$$

$$= \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \alpha_x \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

d) Spinortransformation:

$$L \begin{pmatrix} E_p + mc^2 \\ 0 \\ 0 \\ pc \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \begin{pmatrix} E_p + mc^2 - \frac{\beta\gamma}{1+\gamma} pc \\ 0 \\ 0 \\ pc - \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(E_p + mc^2) \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} \\ \\ \\ \mathrm{I} \end{matrix}$$

I $$pc - \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(E_p + mc^2) = \beta\gamma mc^2 - \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(\gamma mc^2 + mc^2)$$

$$= \beta\gamma mc^2 \left(1 - \frac{\gamma+1}{1+\gamma}\right) = 0$$

II $$E_p + mc^2 - \frac{\beta\gamma}{1+\gamma} pc = (\gamma+1) mc^2 - \frac{\beta^2\gamma^2}{1+\gamma} mc^2$$

$$= mc^2 \left(\frac{\gamma^2 + 2\gamma + 1 - \beta^2\gamma^2}{1+\gamma}\right)$$

$$= mc^2 \frac{\gamma^2(1-\beta^2) + 2\gamma + 1}{1+\gamma} = 2mc^2$$

$$\psi'(t', \vec{r}') \propto \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}\, 2mc^2 \; e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\propto e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11 IDENTISCHE TEILCHEN & VERTAUSCHUNGSENTARTUNG

a) $\underbrace{|\uparrow_x\rangle}_{}= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$

Spin ↑ in x-Richtung für ein Teilchen!

Zu messender Zustand $|\varphi\rangle$:

$$|\varphi\rangle = |\uparrow_x\rangle_{(1)} |\uparrow_x\rangle_{(2)} = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle_{(1)}|\uparrow\rangle_{(2)} + |\uparrow\rangle_{(1)}|\downarrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(1)}|\uparrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(1)}|\downarrow\rangle_{(2)}\Big)$$

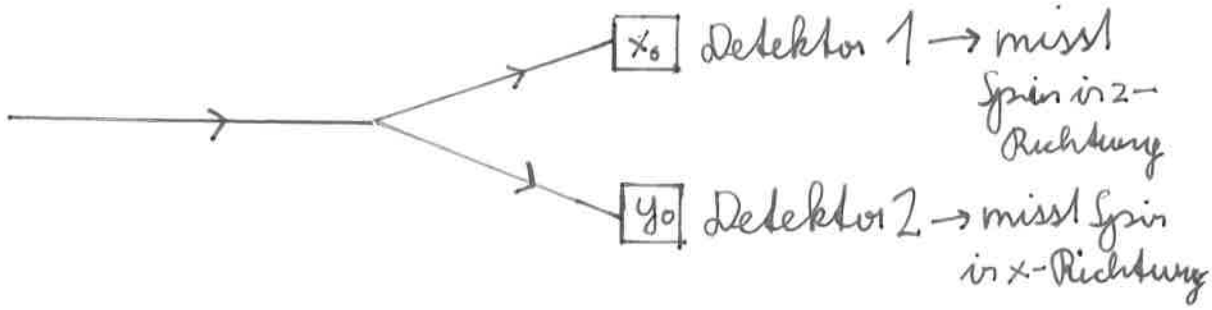
Wahrscheinlichkeit den Zustand $|\varphi\rangle$ zu messen:

$$p = \mathrm{Tr}(P_\varphi\, \rho) \quad \text{mit} \quad P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$$
$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\Rightarrow p = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2 = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{|\alpha|^2+|\beta|^2}_{1} + \underbrace{\alpha\beta^* + \alpha^*\beta}_{2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)}\Big)$$

b) Um einen Spin $|\uparrow_x\rangle$ in x-Richtung und einen Spin $|\uparrow\rangle$ in z-Richtung zumessen, muss man die beiden Spins unterscheiden können!

z. B.: indem man die Messungen an unterschiedlichen Orten x_0 und y_0 durchführt:



Wir berücksichtigen nun auch den Ortsanteil $|\varphi\rangle$ der Wellenfunktion $|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes \left(\alpha |\uparrow\rangle_{(1)} |\downarrow\rangle_{(2)} + \beta |\downarrow\rangle_{(1)} |\uparrow\rangle_{(2)}\right)$.

Der Einfachheit halber nehmen wir eine symmetrische Ortswellenfunktion an, d. h.:

$$\left({}_{(1)}\langle x| \, {}_{(2)}\langle y|\right)|\varphi\rangle = \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

Der zu messende Zustand χ lautet (unter Berücksichtigung der Vertauschungsentartung):

$$|\chi\rangle = \gamma \, |x_0\rangle_{(1)} |y_0\rangle_{(2)} |\uparrow\rangle_{(1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(2)} \right) +$$
$$\delta \, |y_0\rangle_{(1)} |x_0\rangle_{(2)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_{(1)} + |\downarrow\rangle_{(1)} \right) |\uparrow\rangle_{(2)}$$

Für $x_0 \neq y_0$: $\quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad$ um $\langle\chi|\chi\rangle = 1$

Man erkennt:
- An x_0 wird der Spin in z-Richtung, an y_0 der Spin in x-Richtung gemessen.
- Welches der beiden Teilchen an x_0 bzw. y_0 gemessen wird, kann nicht festgestellt werden!

Wahrscheinlichkeit $|\chi\rangle$ bei gegebenem Anfangszustand $|\psi\rangle$ zu messen:

$$p = \mathrm{Tr}(P_\chi \rho), \quad \text{mit} \quad \left.\begin{aligned} P_\chi &= |\chi\rangle\langle\chi| \\ \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \end{aligned}\right\} \; p = |\langle\psi|\chi\rangle|^2$$

$$p = \left| \varphi(x_0, y_0) \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \gamma^* + \underbrace{\varphi(y_0, x_0)}_{\varphi(x_0, y_0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \delta^* \right|^2$$

$$\underline{p = \frac{1}{2} |\varphi(x_0, y_0)|^2 \; |\alpha \gamma^* + \beta \delta^*|^2}$$

$\varphi(x_0, y_0) \ldots$ z. B.: Produkt zweier an x_0 und y_0 zentrierter Gauß'schen Wellenpakte.

$\Rightarrow$ Exakter Ort der Messung ist nicht relevant

$\Rightarrow$ Integriere über $|\varphi(x_0, y_0)|^2 \rightarrow 1$

$$\underline{p = \frac{1}{2} |\alpha \gamma^* + \beta \delta^*|^2}$$

c) $\ominus$ Ergebniss aus a) für Fermionen: $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$

$$p = 0$$

$\ominus$ Ergebniss aus b) für Fermionen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \gamma = 1/\sqrt{2} \\ \beta = \delta = -1/\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |\alpha \gamma^* + \beta \delta^*|^2 = 1$$

$$\Rightarrow p = 1/2$$

<u>Bemerkung:</u> Die Messung der Spins entlang unterschiedlicher Quantisierungsachsen am selben Ort $x_0 = y_0$ ist problematisch.

$\Rightarrow$ Man könnte die Rechnung zwar wie oben durchführen <u>aber</u>

$|\chi\rangle$ ist nicht mehr durch $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ normiert.
Verwendet man diese Bedingung dennoch, so ist
$P_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$ kein Projektionsoperator mehr,
d. h. $P^2 \neq P$!

Das Problem ist analog zu einem reinen Spin-Systems (ohne Ortsanteil), wo die Schwierigkeiten im Falle von Fermionen noch klarer zu Tage treten:

Der Hilbertraum lautet: $H = \{ |\uparrow\rangle_{(1)} |\uparrow\rangle_{(2)}, |\uparrow\rangle_{(1)} |\downarrow\rangle_{(2)}, |\downarrow\rangle_{(1)} |\uparrow\rangle_{(2)}, |\downarrow\rangle_{(1)} |\downarrow\rangle_{(2)} \}$

Der entsprechende fermionische Unterraum ist <u>eindimensional</u>:

$$H_F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_{(1)} |\downarrow\rangle_{(2)} - |\downarrow\rangle_{(1)} |\uparrow\rangle_{(2)} \right) \right\}$$

d.h. im Prinzip kann ich nur diesen Zustand mit der Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 messen, nicht aber den Zustand $|\uparrow_x\rangle |\uparrow\rangle$!

d) $H = \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_n^2 \right)$

ohne WW $\rightarrow$ $|\psi\rangle = |\psi_n\rangle_1 |\psi_n\rangle_2 |\psi_n\rangle_3$

$$E = E_n^1 + E_n^2 + E_n^3$$

(i) Grundzustand:

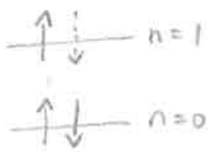
$$E_0 = E_0^1 + E_0^2 + E_1^3 = \frac{5\hbar\omega}{2}$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} |\phi_1\rangle_1 & |\phi_2\rangle_1 & |\phi_3\rangle_1 \\ |\phi_1\rangle_2 & |\phi_2\rangle_2 & |\phi_3\rangle_2 \\ |\phi_1\rangle_3 & |\phi_2\rangle_3 & |\phi_3\rangle_3 \end{vmatrix}$$

$|\phi_1\rangle = |0\rangle|\uparrow\rangle$

$|\phi_2\rangle = |0\rangle|\downarrow\rangle$

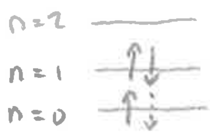
$|\phi_3\rangle = \begin{cases} |1\rangle|\uparrow\rangle \\ |1\rangle|\downarrow\rangle \end{cases}$



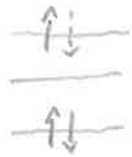
2-fach entartet

1. angeregter Zustand:

$$E_1 = E_0^1 + E_1^2 + E_1^3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$$



od.



4-fach entartet

(ii) Grundzustand:

$E_0 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ $\qquad |\psi_0\rangle = |000\rangle$

1. angeregter Zustand

$E_1 = \frac{5\hbar\omega}{2}$ $\qquad |\psi_1\rangle = \frac{1}{3}\left(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle\right)$

e) (i) $E_{max} = \frac{\hbar\omega}{2}$

(ii) $E_{max} = \hbar\omega\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + \frac{1}{2}\right)$

(iii) $E_{max} = \hbar\omega\left(\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor + \frac{1}{2}\right)$